



UNIVERSITÀ DI SALERNO
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INDUSTRIALE

TESI DI DOTTORATO
INGEGNERIA MECCANICA
XI CYCLE (2009–2012)

**Stabilità di flussi
in cavità aperte**

Raffaele Salvatore Donelli

Supervisore
Ch.mo Prof.
Flavio Giannetti,
Paolo Luchini

Coordinatore
Ch.mo Prof.
Vincenzo Sergi

A mio padre e alla mia famiglia

Virtute siderum tenus.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare di cuore il Prof. F. Giannetti, tutor del mio Dottorato di Ricerca, per la profonda e sincera amicizia di cui mi ha voluto onorare e per le stimolanti discussioni che hanno contribuito alla mia crescita umana e professionale.

Ringrazio il prof. P. Luchini per il supporto scientifico che mi ha sempre concesso durante la nostra lunga collaborazione lavorativa. Grazie per l'amicizia ed il rispetto che mi hai sempre accordato.

Sebbene non più qui tra noi, vorrei rivolgere un grazie a mio padre per avermi trasmesso il suo ottimismo e la sua tenacia, per avermi insegnato valori come onestà e lealtà. Grazie per i tuoi sacrifici con i quali hai reso possibile a me ed ai miei fratelli studiare.

Dulcis in fundo, desidero ringraziare le persone a me più care, mia moglie Anna per la santa pazienza con la quale mi è stata sempre vicino nei momenti di gioia e, soprattutto, di sconforto, i miei figli Pina, Carmen, Nicolino e Nicola, ai quali ho sottratto tante volte la mia presenza. È grazie a voi e alla forza che ogni giorno mi date che sono riuscito a completare questo altro piccolo passo della mia vita. Un pensiero va anche a tutta la mia grande famiglia dalla mamma ai fratelli, dai cognati a tutti i nipoti, grazie.

R.S. D.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	La Tecnica dei Vortici Intrappolati	2
1.2	Contesto e Motivazione della Tesi	10
2	Stato dell'Arte	13
2.1	Flussi su cavità aperte	14
2.2	Flussi in cavità chiuse	15
2.3	Meccanismo delle Oscillazioni su cavità	16
2.3.1	Oscillazioni Fluidodinamiche	17
2.3.2	Oscillazioni Fluido-Risonanti	17
2.3.3	Oscillazioni Fluido-Elastiche	18
2.4	Instabilità in Cavità - Studi e Progressi	18
2.4.1	I modi Acustici o di Rossiter	19
2.4.2	Modi di Scia	20
2.4.3	Oscillazioni auto sostenute e forzate	20
2.4.4	Flussi su Cavità Tridimensionali	21
3	Teoria della Stabilità Globale	23
3.1	Stabilità globale e l'ipotesi di flusso parallelo	24
3.2	Stabilità Globale	25
3.2.1	Terminologia per la stabilità globale	28
3.3	Alcuni rilevanti aspetti Numerici	30
3.3.1	Discretizzazione Spaziale	31
3.3.2	Condizioni al Contorno per l'analisi di stabilità globale	33
4	Metodi Numerici e Codici di Calcolo	35
4.1	Cenni ai Metodi alle Differenze Finite	35
4.1.1	Approssimazione alle differenze finite	36
4.2	FreeFem++	38
4.2.1	Generatore di Griglia Bamg	41

4.2.2	Freefem e la cavità 2D	42
4.3	Cenni ai Metodi Spettrali	45
4.3.1	Metodi SM e SEM	46
4.3.2	Polinomi di Legendre	48
4.3.3	Formule di quadratura	50
4.4	Discretizzazione usando SEM	53
4.5	NEK5000- Breve Introduzione	55
4.5.1	Scaling del codice NEK5000 su macchina Cineca	57
5	Cavità 2.5D	61
5.1	Premessa	61
5.2	Configurazione geometrica	62
5.3	Modello teorico per la cavità	63
5.3.1	Flusso base e condizioni al contorno	63
5.3.2	Analisi di Stabilità Globale	64
5.3.3	Sensitività Strutturale	66
5.4	Approccio Numerico	67
5.4.1	Calcolo del flusso base	67
5.4.2	Calcolo degli autovalori e dell'aggiunto	69
5.5	Stabilità Lineare	72
5.5.1	Instabilità tridimensionali rispetto a quelle bidimensionali	72
5.5.2	Sensitività strutturale della prima biforcazione	74
5.6	Confronto tra diverse configurazioni di cavità	78
5.6.1	Cavità aperta rispetto alla <i>Lid - driven</i>	78
6	Cavità 3D	85
6.1	Il modello Teorico	85
6.1.1	Premessa	85
6.1.2	Flusso nella cavità 3D	86
6.1.3	Modello Teorico	87
6.1.4	Sensitività Strutturale	88
6.2	Risultati Preliminari Cavità 3D	93
6.2.1	Metodo numerico, discretizzazione spaziale e temporale	93
6.2.2	Dominio di calcolo, griglia e condizioni al contorno	94
6.2.3	Simulazioni e Risultati	98
7	Conclusioni	111
	Bibliography	115

Elenco delle figure

1.1	EKIP Aircraft	3
1.2	Rampa con cavità.	4
1.3	Caratteristiche della galleria del vento CIRA CT1.	5
1.4	Cassetto rampa provvisto di cavità realizzato tutto in plexi- glas e sistema di suzione.	5
1.5	Distribuzione delle prese di pressione nella cavità.	6
1.6	Campo di moto nella cavità senza suzione a 15 m/s . A sinistra angolo di attacco 5° ; a destra 8.5°	7
1.7	Distribuzioni di pressione a diverse incidenze della rampa a velocità 15 m/s	7
1.8	Campo di moto nella cavità alla velocità di 15 m/se con su- zione di $25\text{ m}^3/h$	8
1.9	Distribuzioni di pressione alla velocità di 15 m/s per diverse valori della suzione.	9
1.10	Cavità rettangolare e sistema di riferimento.	9
2.1	Schema del modello del campo di moto sulla cavità aperta. . .	15
2.2	Esempio di campo di moto in una cavità chiusa sia in regime subsonico che supersonico.	16
3.1	Classificazione della stabilità locale di un flusso in termini del- la risposta d'impulso. a) Stabile, b) convettivamente instabile e c) assolutamente instabile [112]	24
4.1	Diagramma riassuntivo per la risoluzione di un problema dif- ferenziale mediante elementi finiti implementato con Freefem . . .	40
4.2	Rappresentazione griglie non strutturate usate per i calcoli 2D. . .	43
4.3	Linee di corrente per diverse griglie. Variazioni non apprezzabili. . .	44
4.4	<i>Test</i> sullo <i>scaling</i> del codice nek5000 su macchina Fermi. . . .	59

5.1	Geometria della cavità e sistema di riferimento.	62
5.2	Discretizzazione della cavità aperta.	69
5.3	Dettaglio del livello di rifinitura della griglia negli spigoli e nella regione dello <i>shear layer</i> . Cavità aperta.	69
5.4	Contour map della velocità e linee di corrente a $Re=1370$. . .	70
5.5	Stabilità lineare sulla cavità aperta a $Re=4140$. Parte reale dell'autovalore γ in funzione del numero d'onda k	72
5.6	Stabilità lineare sulla cavità aperta a $Re=4140$. Parte immaginaria dell'autovalore γ in funzione del numero d'onda k	73
5.7	Spettro degli autovalori a $Re=4140$ e $k=22$. I numeri riportati in figura si rifanno a quelli usati in 5.6.	74
5.8	Valore del rateo di crescita dei disturbi più instabili in funzione del numero d'onda k per diversi valori di Reynolds. Per tutti questi modi la frequenza è zero. Il primo modo instabile del flusso su una cavità aperta è un modo tridimensionale stazionario	75
5.9	<i>Contour plots</i> del valore assoluto delle autofunzioni dirette e aggiunte dei modi 2, 3 e 4 come mostrato in figura 5.7 per $Re = 4140$ e $k = 22$. a) e d): diretto e aggiunto del modo 2 ($\omega \approx 0.3$); b) e e) modo 3 ($\omega \approx 0.6$); c) e f) modo 4 ($\omega \approx 0.9$).	76
5.10	<i>Contour plots</i> della componente del modo diretto ed aggiunto in direzione <i>streamwise</i> [a)diretto; d)aggiunto], normale alla parete [b)diretto; e)aggiunto] e in direzione dell'apertura [c)diretto; f)aggiunto] calcolati vicino al numero di Reynolds critico a $Re = 1370$, $k = 13.4$	77
5.11	Sensitività strutturale, il cuore dell'instabilità, alle condizioni neutrali, $Re = 1370$, $k = 13.4$, per il flusso su una cavità aperta quadrata. La figura mostra anche la linea di corrente dove l'analisi asintotica predice il massimo della crescita non viscosa.	77
5.12	<i>Contour plot</i> del valore assoluto delle componenti della sensitività strutturale per $Re = 1370$, $k = 13.4$, ($L/D = 1$	78
5.13	Cavità investita da strato limite di Blasius - Profilo di velocità u in direzione <i>streamwise</i> nella sezione verticale (linea tratteggiata) e nella sezione orizzontale (linea continua) calcolati a $Re = 1370$, $k = 13.4$, ($L/D = 1$	79

5.14	Cavità investita da flusso di Coutte - Profilo di velocità u in direzione <i>streamwise</i> nella sezione verticale (linea tratteggiata) e nella sezione orizzontale (linea continua) calcolati a $Re = 20200$, $k \approx 13.0$, $(L/D) = 1$.	80
5.15	Cavità <i>lid-driven</i> - Profilo di velocità u in direzione <i>streamwise</i> nella sezione verticale (linea tratteggiata) e nella sezione orizzontale (linea continua) calcolati a $Re = 790$, $k \approx 15.4$, $(L/D) = 1$.	80
5.16	Cavità aperta investita da strato limite di Blasius - Analisi di sensitività strutturale calcolata a $Re = 1370$, $k = 13.4$, $(L/D) = 1$.	81
5.17	Cavità aperta investita da flusso di Coutte - Analisi di sensitività strutturale calcolata a $Re = 20200$, $k \approx 13.0$, $(L/D) = 1$.	82
5.18	Cavità <i>lid-driven</i> - Analisi di sensitività strutturale calcolata a $Re = 790$, $k \approx 15.4$, $(L/D) = 1$.	83
6.1	Vista 3D del dominio di calcolo per la cavità 3D	94
6.2	Proiezione del dominio computazionale secondo il piano xy.	95
6.3	Proiezione del dominio computazionale secondo il piano yz.	96
6.4	Proiezione del dominio computazionale secondo il piano xz.	96
6.5	Residuo delle equazioni ovvero grafico della norma L^2 .	100
6.6	Distribuzione del modulo della velocità nei due piani xz e yz.	100
6.7	Distribuzione 2D (nel piano xz) e 3D della componente di velocità w.	101
6.8	Distribuzione 3D della componente di velocità w a valle della cavità.	101
6.9	Distribuzione 3D della componente di velocità v (vista dal basso).	102
6.10	Distribuzione 3D della componente di velocità v a valle della cavità.	102
6.11	Distribuzione di pressione nel dominio di calcolo - vista anteriore.	103
6.12	Distribuzione di pressione nel dominio di calcolo - vista laterale.	103
6.13	Distribuzione del modulo della velocità nel piano xz.	104
6.14	Distribuzione della componente w della velocità nel piano xz.	105
6.15	Distribuzione della componente v di velocità nel piano xz.	105
6.16	Distribuzione della pressione nel piano xz.	106
6.17	Distribuzione del modulo della velocità nel piano yz.	107
6.18	Distribuzione della componente u della velocità nel piano yz.	107

6.19	Distribuzione della componente w della velocità nel piano yz .	108
6.20	Distribuzione della componente v della velocità nel piano yz .	109
6.21	Distribuzione della pressione nel piano yz .	109

Elenco delle tabelle

4.1	Caratteristiche della <i>mesh</i> per i calcoli sulla cavità 2D e numero di Reynolds.	43
4.2	Risultati del test dello <i>scaling</i> di nek5000 su macchina Fermi.	59
5.1	Dettagli sulle griglie non strutturate. <i>n_{d.o.f.}</i> numero di nodi della griglia; <i>n_t</i> numero dei triangoli impiegati per la griglia	68
5.2	Confronto tra i risultati ottenuti in questa tesi e quelli di [41] per la stessa configurazione geometrica. La frequenza del modo ω ed il rateo di crescita del disturbo σ sono stati calcolati per il primo modo instabile per $Re=4140$	71
5.3	Valori del numero di Reynolds critico e del numero d'onda <i>k_{spanwise}</i> a cui sono stati effettuati i confronti.	79
5.4	Valori del Reynolds critico, del <i>Re_{av}</i> e del numero d'onda <i>k_{spanwise}</i> a cui sono stati effettuati i confronti.	84
6.1	Caratteristiche della <i>mesh</i> per i calcoli sulla cavità 3D e numeri di Reynolds investigati.	99

Capitolo 1

Introduzione

Nell'ultimo ventennio il costo dei carburanti ha subito una notevole crescita con gravi ripercussioni sui trasporti, specie quello aeronautico. Inoltre, la Comunità Europea, allo scopo di iniziare una politica di salvaguardia dell'ambiente in cui viviamo, ha introdotto dei vincoli molto restrittivi sia per quanto riguarda le emissioni di gas inquinanti, quali anidride carbonica e ossidi di azoto, e sia per l'emissione di rumore per gli aerei di prossima generazione. Secondo le direttive di ACARE 2020 (Advisory Council for Aerospace Research in Europe), i nuovi aerei dovranno avere caratteristiche tali da ridurre dell'ottanta per cento le emissioni di ossido di azoto e del cinquanta per cento le emissioni di anidride carbonica, mentre i rumori emessi dovranno subire una riduzione di 10 EPNdB (equivalente a dimezzare le emissioni acustiche di un aereo costruito con tecnologia anni 2000). Da qui la forte richiesta dell'industria aeronautica per lo sviluppo di tecnologie mirate alla riduzione di qualsiasi forma di resistenza aerodinamica in modo da assicurare una conseguente riduzione di consumo dei carburanti e di emissione di gas inquinanti. Inoltre, c'è da aspettarsi che qualsiasi miglioramento aerodinamico ottenuto attraverso un miglioramento dell'efficienza dell'aereo abbia, come conseguenza indiretta, un miglioramento sulle emissioni di rumore. L'eliminazione di qualsiasi separazione del flusso su componenti dell'aereo ed il miglioramento dell'integrazione presa d'aria-ala, ala-fusoliera, piano di coda-fusoliera, eccetera e eccetera, ha sicuramente effetti benefici sull'emissione di rumori. Ovviamente, il maggior contributo al raggiungimento degli obiettivi posti dalla Comunità Europea vengono dallo sviluppo di nuovi motori con bassi consumi e ridotta emissione di inquinanti quali il *Geared Turbo Fan* e il *Counter Rotating Open Rotor*. In questo contesto, hanno subito una notevole spinta lo sviluppo di tecniche del controllo del flusso volte a migliorare l'efficienza dell'aereo, tra queste

tecniche si ricordano micro e macro generatori di vortici, *riblets*, *synthetic jets*, *plasma actuators*, *unsteady blowing*, *suction*, micro-roughness elements, morphed structures, gurney flaps, winglets, trapped vortex, questo solo per citarne alcune tra le più gettonate. Di queste tecniche alcune sono ormai normalmente utilizzate sugli aerei, come per esempio i micro e macro generatori di vortici o le *winglets*, mentre altre hanno ancora un basso livello di *Technological Readiness Level* (TRL) per cui sono ancora in una fase di studio e di collaudo.

Dato il forte interesse del CIRA (Centro Italiano di Ricerca Aerospaziale) per queste tecniche di controllo del flusso, alcune di esse sono state studiate sia attraverso simulazioni numeriche che sperimentali, come la tecnica di soffiamento instazionario [36], l'applicazione dei *synthetic jet* per il controllo della separazione [128], [61], la cattura dei vortici al fine di incrementare la portanza e ridurre la resistenza ([132], [130], [93], [106]), o l'uso di attuatori al plasma per il controllo del buffeting e la relativa riduzione d'onda [5], [12]. Tra queste tecniche quella che più ha suscitato interesse è certamente quelle dei trapped vortex di cui in questa tesi se ne riporta un excursus per introdurre i motivi che hanno indirizzato questa tesi verso lo studio delle instabilità nelle cavità.

1.1 La Tecnica dei Vortici Intrappolati

La presenza di vortici in flussi intorno a corpi aerodinamici oppure in flussi interni, come nelle camere di combustione, è cosa certa con effetti a volte negativi e non desiderabili (vortici che si staccano dai flap di un aereo e che provocano separazione turbolenta generando rumore, oppure separazione del flusso con scia vorticoso e conseguente perdita di portanza con aumento di resistenza come accade nel caso dello stallo di un'ala) e altre volte positivi come accade nelle camere di combustione dove in genere contribuiscono a stabilizzare la fiamma. Ad ogni modo sia il meccanismo che li genera e sia la loro simulazione ancora oggi è oggetto di studio. L'uso dei vortici nel campo del controllo del flusso nasce da una idea sviluppata e brevettata dai Russi [52] negli anni novanta. Questi avevano sviluppato un velivolo volante la cui portanza non era generata dalle ali bensì da una serie di cavità capaci di intrappolare vortici. I vortici venivano intrappolati in modo stabile attraverso una suzione applicata nelle cavità stesse disposte lungo la parte posteriore del velivolo come mostrato 1.1

L'idea di poter intrappolare un vortice in una cavità integrata in un profilo alare è interessante perché presenta due possibili effetti positivi e cioè produrre un incremento di portanza dovuto all'incremento netto di circo-

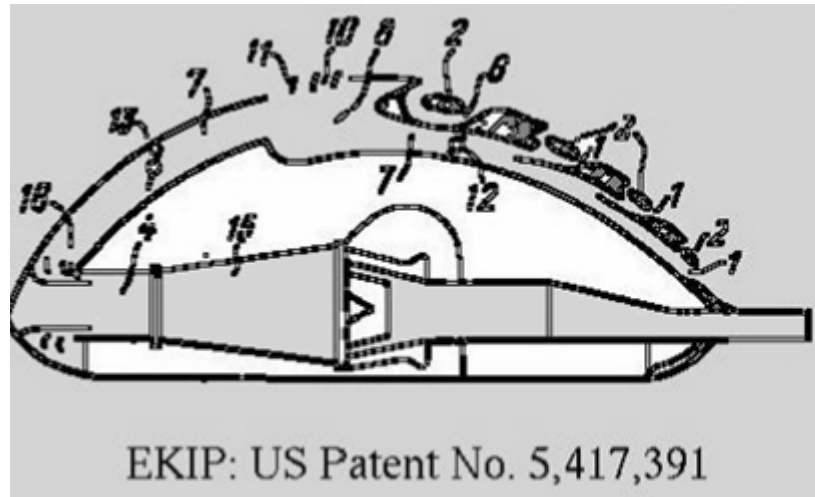


Figura 1.1: EKIP Aircraft .

lazione introdotta dalla presenza del vortice e, contemporaneamente una riduzione di resistenza nel momento che si riesce a sopprimere o a rimandare la separazione del flusso (riduzione della resistenza di pressione). Questo concetto è tanto più vero quanto maggiore è lo spessore del profilo. Ovviamente occorre che la cavità abbia una particolare forma e sia posizionata sul dorso del profilo alare nella regione del bordo di uscita.

Il primo sforzo fatto è stato quello di procurarsi gli strumenti necessari per il disegno e la simulazione del flusso su di una lastra piana dotata di cavità in grado di intrappolare un vortice. Il disegno della cavità è stato ottenuto attraverso l'applicazione delle trasformazioni conformi mentre il campo di moto nella cavità è stato simulato attraverso il flusso di Prandtl-Batchelor (metodo non viscoso) con un appropriato salto della costante di Bernoulli attraverso la linea di corrente che divide il flusso interno alla cavità da quello esterno. Per la verifica ed il collaudo di questo approccio si è utilizzato un codice CFD, precedentemente collaudato attraverso confronti con dati sperimentali, basato sulle *Reynolds Averaged Navier Stokes equations* (RANS) e diversi modelli di turbolenza (per maggiori dettagli vedi [132]). Il confronto tra i risultati prodotti dai due approcci ha confermato che gli effetti della viscosità sono trascurabili per cui il disegno della cavità su profili alari è stato eseguito con questa procedura.

A questo punto è stato progettato un esperimento che prevedeva la realizzazione di una rampa avente la forma di un profilo alare e tale da presentare separazione del flusso sul dorso. Lo scopo era utilizzare questa rampa per investigare la fattibilità ed efficienza di diverse tecniche per il controllo del flusso. Sul dorso della rampa è stata opportunamente disegnata una cavità, con gli strumenti numerici suddetti, come mostrato in figura 1.2.

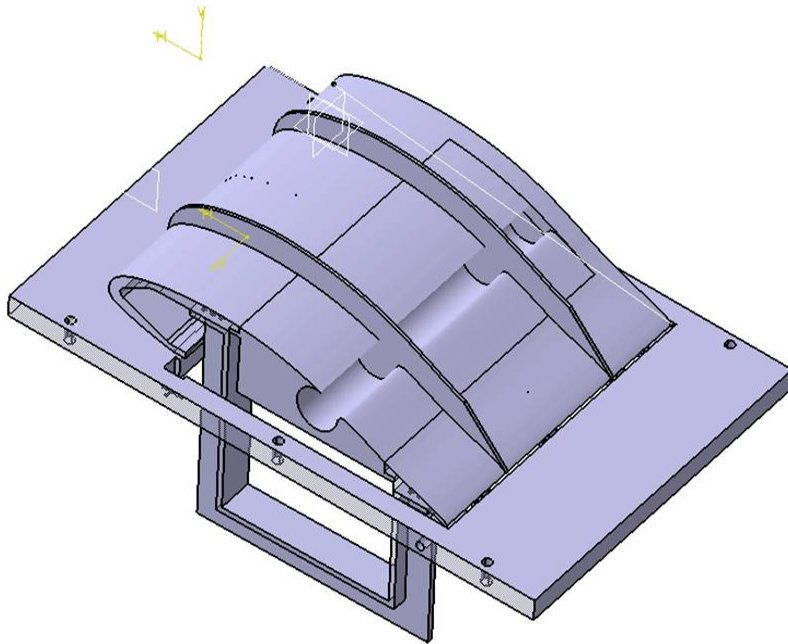


Figura 1.2: Rampa con cavità.

La rampa è stata poi installata nella galleria subsonica del CIRA (Centro Italiano di Ricerca Aerospaziale). Questa è una galleria a circuito aperto di tipo Eiffel dotata di una camera di prova trasparente che permette l'utilizzo della tecnica di misura PIV *Particle Image Velocimetry*. La camera di prova ha una lunghezza di 0.55 m e ha sezione trasversale di forma quadrata con dimensione di 0.305 m, vedi figura 1.3. Questa galleria si presta a questi tipi di studio grazie ai suoi bassissimi costi.

La rampa è stata dotata di un sistema per poter variare l'incidenza, e quindi la posizione del punto di ristagno al bordo d'attacco ed il punto di separazione del flusso sul dorso. La cavità è stata realizzata in plexiglass, vedi figura 1.4, per permettere la visualizzazione del flusso al suo interno

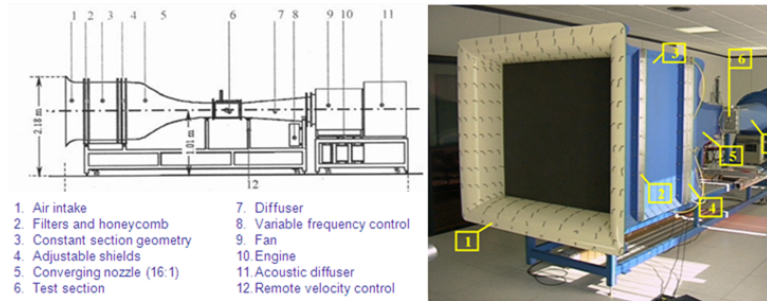


Figura 1.3: Caratteristiche della galleria del vento CIRA CT1.

attraverso la tecnica PIV.

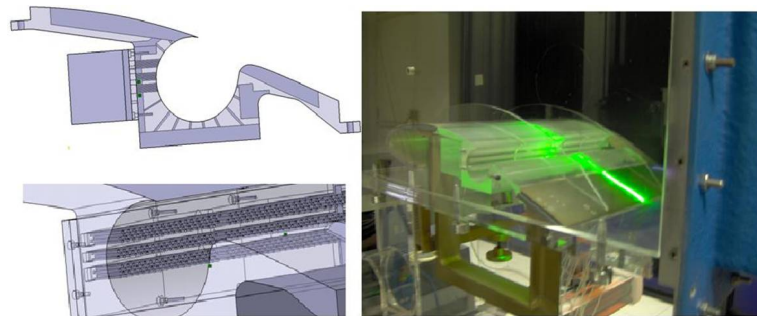


Figura 1.4: Cassetto rampa provvisto di cavità realizzato tutto in plexiglas e sistema di suzione.

Inoltre è stato previsto, internamente alla cavità, un sistema di suzione da utilizzare nel momento in cui il vortice non fosse stabilmente presente al suo interno. La rampa è stata equipaggiata con diverse prese di pressione, di cui ben dieci installate nella sezione circolare della cavità come mostrato in figura 1.5.

Una approfondita indagine sulle prestazioni della rampa, in assenza di cavità, atta a valutare la posizione della separazione, è stata condotta per diverse velocità della galleria (intervallo 10-35 m/s) e al variare dell'incidenza della rampa (intervallo 5.5-12 gradi con passo di mezzo grado). Successivamente sono iniziate le indagini con la cavità montata sulla rampa. Per ogni singolo punto della matrice di prova, sono state effettuate misure

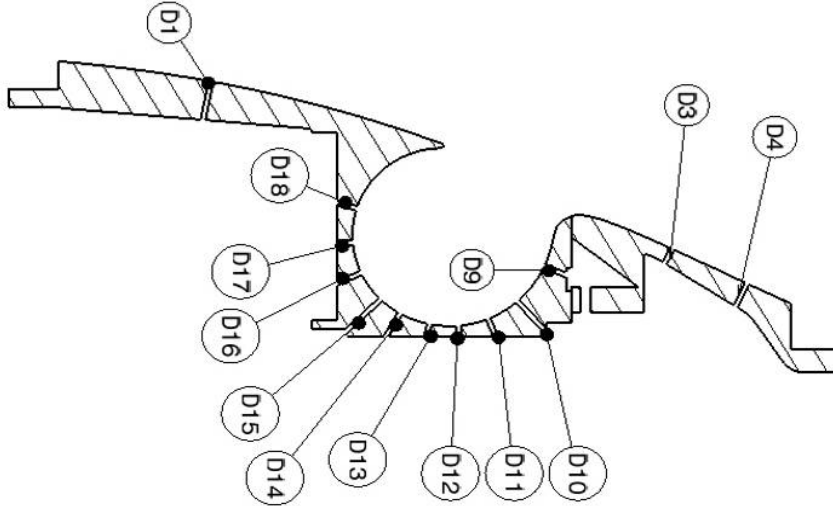


Figura 1.5: Distribuzione delle prese di pressione nella cavità.

PIV e misure di pressione.

A titolo di esempio, la figura 1.6 mostra il campo di moto nella cavità per una velocità della galleria di 15 m/s e per due angoli d'attacco: a sinistra di 5° e a destra di 8.5° . Come si evince dalle linee di corrente, in entrambi i casi il vortice non risulta stabilmente posizionato nella cavità ma piuttosto nella sua bocca pronto ad essere espulso ed il fenomeno si accentua all'aumentare dell'incidenza. Poiché le figure sono ottenute ricostruendo il campo di moto attraverso 150 foto istantanee, questo significa che esso rappresenta una media. Nella realtà il vortice viene espulso per poi rigenerarsi.

In questa situazione, non c'è controllo della separazione. Infatti osservando la distribuzione di pressione sulla rampa, si vede che in assenza di suzione (configurazione di riferimento) a partire dalla cuspide della cavità il flusso è completamente separato come dimostrano i plateau nelle distribuzioni di pressione ottenute a diverse incidenze della rampa ma a parità di velocità. Il fenomeno si accentua all'aumentare dell'angolo di attacco della rampa come mostra la figura 1.7.

Data la natura instabile della posizione del vortice, si è deciso di utilizzare la suzione per tenerlo stabilmente nella cavità. La suzione è stata applicata nella regione della cavità situata proprio sotto la cuspide, come viene mostrato nella figura 1.4 a sinistra. La suzione è stata applicata su tre regioni distinte e poteva essere attuata contemporaneamente attraverso

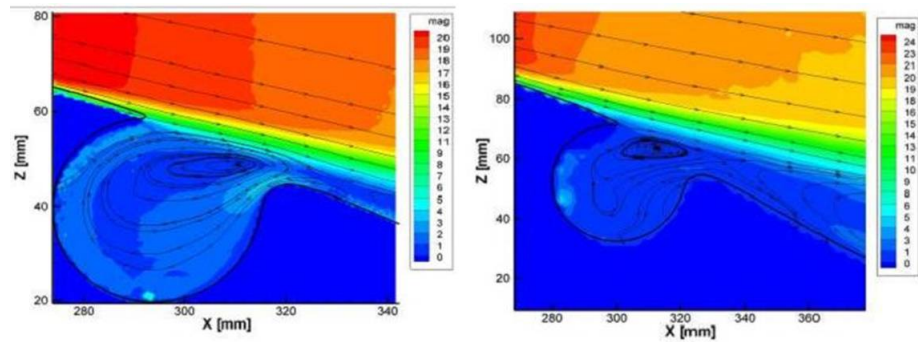


Figura 1.6: Campo di moto nella cavità senza suzione a 15 m/s . A sinistra angolo di attacco 5° ; a destra 8.5° .

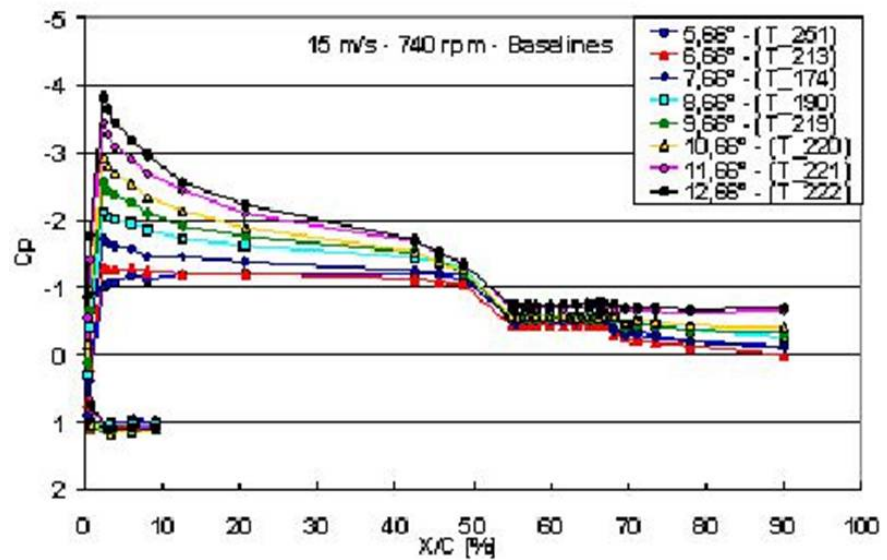


Figura 1.7: Distribuzioni di pressione a diverse incidenze della rampa a velocità 15 m/s .

tutte e tre le sezioni o attraverso diverse combinazioni di queste tre regioni. Inoltre poteva essere modificata la massa d'aria succhiata dalle varie sezioni. A titolo di esempio, in questa tesi si mostrano i risultati relativi alla velocità di 15 m/s e all'incidenza di circa 8.5° . In particolare, la figura 1.8 mostra

il campo di moto nella cavità quando una suzione uniforme di $25m^3/h$ su tutte e tre le regioni è applicata.

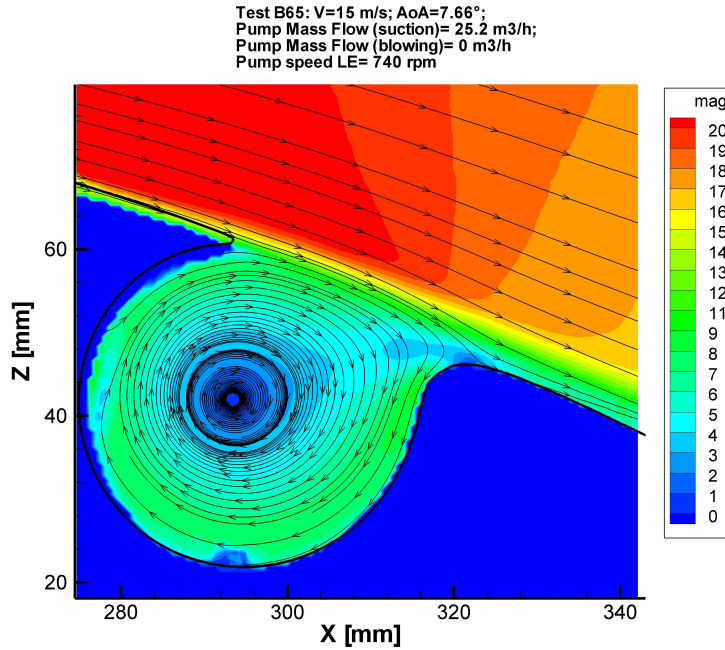


Figura 1.8: Campo di moto nella cavità alla velocità di $15m/se$ con suzione di $25m^3/h$.

Le linee di corrente evidenziano sul gomito della cavità un nuovo punto di ristagno da cui si diparte un nuovo strato limite con flusso riattaccato. Ciò che è stato osservato in questi esperimenti è che solo nel momento in cui il vortice si stabilizza nel centro della cavità ed il flusso si mette in rotazione il flusso esterno riattacca e ciò può essere apprezzato dalla figura 1.9 che mostra le distribuzioni di pressione in presenza di suzione.

Come si vede c'è un recupero di pressione tanto più forte quanto maggiore è la suzione. Il che significa che la separazione

del flusso viene sempre più spostata verso il bordo di uscita della rampa sino ad ottenere flusso tutto riattaccato.

Quindi la suzione riesce a sopprimere le instabilità del flusso che tendevano a far espellere il vortice. Ma la suzione

ha un costo che potrebbe annullare i benefici ottenuti dal ritardo o addirittura dall'eliminazione della separazione del flusso. L'ideale sarebbe avere

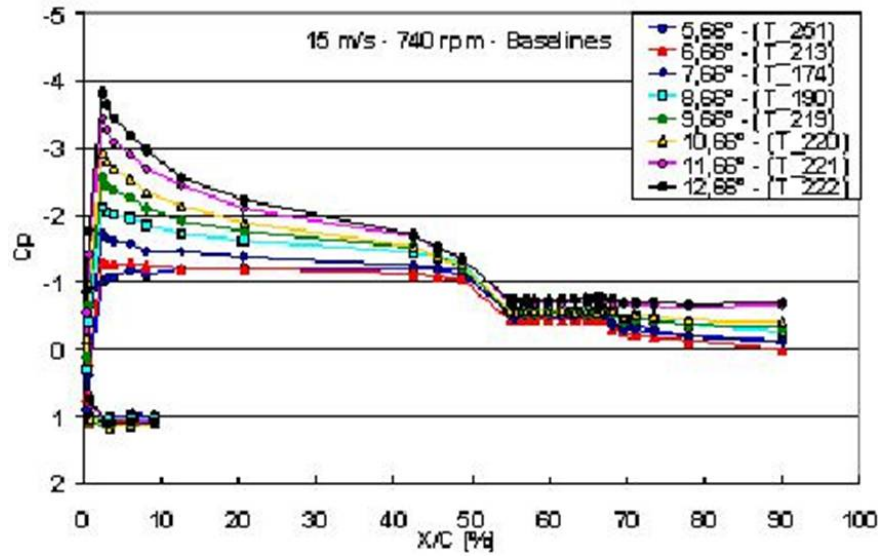


Figura 1.9: Distribuzioni di pressione alla velocità di 15 m/s per diverse valori della suzione.

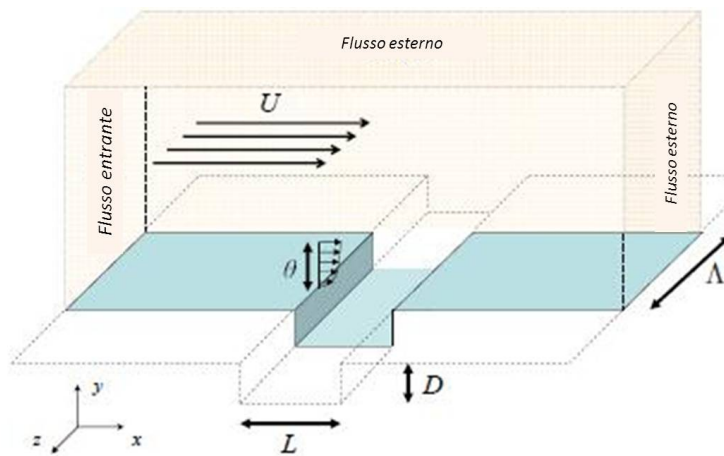


Figura 1.10: Cavità rettangolare e sistema di riferimento.

un vortice stabile nella cavità senza dover ricorrere ad una tecnica di controllo del flusso per stabilizzare il vortice. Basato su queste considerazioni si è deciso di iniziare una attività di studio sul tipo di instabilità che si inne-

scano in una cavità aperta investita da un flusso. Lo scopo di questo studio è capire in quale condizioni, cioè per quale valore del numero di Reynolds e per quali valori della dimensione della cavità, queste instabilità si verificano e di che natura esse sono. A tale fine si è deciso di concentrarsi sullo studio di una cavità rettangolare in cui profondità e larghezza della cavità sono due parametri dello studio in oggetto, come mostrato nella figura 1.10.

Lo studio è stato iniziato con una ricerca bibliografica sui lavori in letteratura condotti sulla stabilità del flusso in una cavità. Nel paragrafo successivo viene riportato il risultato di questo studio.

1.2 Contesto e Motivazione della Tesi

Qualunque mezzo di trasporto, dall'auto al treno, dalle navi agli aerei presenta sulla sua superficie esterna delle cavità, a volte dovute ad esigenze legate al moto stesso del mezzo, come nel caso delle ruote di una auto o del carrello di un aereo, a volte legate all'esigenza dell'installazione di strumentazione o del lancio di oggetti (lancio di pacchi, paracadutisti, eccetera) come accade per un aereo da trasporto o da soccorso. In tutti questi casi, la presenza della cavità innesca dei forti disturbi acustici con oscillazioni che si auto-alimentano e che possono provocare danni strutturali dovuti a fatica oppure forti incrementi di resistenza. Un semplice esperimento che evidenzia questo fenomeno acustico è l'apertura di un finestrino di un'auto in corsa. Si nota immediatamente un rumore acustico con conseguenti forti oscillazioni del flusso che aumentano di intensità con l'aumentare della velocità (e quindi del numero di Reynolds) perché la cabina passeggeri funziona come un risonatore di Helmholtz. Questo fenomeno diventa ancora più drammatico nel caso degli aerei, si pensi per esempio alle cavità dei carrelli, oppure alle aperture ventrali di tutti quegli aerei aventi l'esigenza del lancio di oggetti durante il volo (canadair per lancio acqua, mezzi di soccorso per lancio viveri, aerei militari per lanci materiale di approvvigionamento, eccetera), ma anche in tutti quei casi in cui le cavità vengono usate come tecniche per il controllo del flusso come per esempio avveniva nella cattura dei vortici. In tutti questi casi occorre sopprimere queste oscillazioni e a questo scopo si possono, per esempio, usare tecniche di controllo attivo o passivo del flusso. Ma per individuare la tecnica più efficiente è necessario conoscere il meccanismo che innesca il fenomeno e questa è la principale motivazione dello studio di questa tesi, cioè individuare quali tipi di instabilità si innescano nella cavità, poiché solo in questo modo si può pensare di individuare una tecnica di controllo che con una spesa energetica minima ci consenta di sopprimere questi fenomeni indesiderati. È indubbio che se siamo in grado anche di

calcolare la regione più sensibile ad eventuali perturbazioni strutturali, ovvero la sensitività strutturale, questo ci aiuta anche nel trovare la migliore posizione dove posizionare i sistemi di attuazione per il controllo del flusso.

Capitolo 2

Stato dell'Arte

I primi studi condotti sulle oscillazioni che si instaurano in una cavità risalgono ai primi anni 50, quando in Inghilterra presso la *Royal Aircraft Establishment* Owen [107] condusse degli esperimenti in galleria del vento a bassa velocità su delle cavità, alcune poco profonde ed altre moderatamente profonde, che simulavano la baia di un bombardiere e trovò che le fluttuazioni di pressione erano casuali. Egli scoprì anche che per una fissata geometria della baia, queste fluttuazioni di pressione aumentavano di intensità all'aumentare dell'energia cinetica della corrente libera. Contemporaneamente, negli Stati Uniti, Norton [103] conduceva degli esperimenti simili ma ad alte velocità sulla baia del bombardiere B-47. Egli scoprì che oltre alle fluttuazioni di pressione casuali, sulla cavità si instauravano anche forti fluttuazioni di natura periodica. Krishnamurty [88] e, più tardi Plumlee [65], hanno scoperto che queste fluttuazioni sono accompagnate da forti radiazioni acustiche emesse dalla cavità con una frequenza che aumenta con la velocità della corrente libera e diminuisce con l'aumentare delle lunghezze della cavità. Plumlee concluse che queste fluttuazioni periodiche erano dovute ad una risonanza acustica eccitata dallo strato limite turbolento che investiva la cavità, ma Krishnamurty dimostrò che queste fluttuazioni periodiche esistevano anche nel caso di strato limite laminare e dedusse che, sebbene la risonanza acustica giocasse un ruolo fondamentale, essa non era provocata dalla natura dello strato limite piuttosto la causa che la scatenava era da ricercare nelle proprietà stesse del flusso sulla cavità.

Più tardi Rossiter [131] nel 1966 condusse una serie di esperimenti per capire ed approfondire le conoscenze delle caratteristiche del flusso che investiva la cavità. Egli mostrò che la pressione instazionaria che si instaurava nella cavità, sia che questa fosse investita da una corrente subsonica che transonica, poteva contenere contemporaneamente sia componenti casuali

che periodiche. Osservò anche che le componenti causali erano dominanti quando le cavità erano poco profonde cioè il rapporto tra lunghezza e profondità era maggiore di quattro, mentre le componenti periodiche erano dominanti nel caso di cavità profonde. In questi esperimenti, un meccanismo di risonanza simile al meccanismo elaborato da Powell [122] nel 1953 dei toni del bordo entro la cavità sembrava essere responsabile delle componenti periodiche della fluttuazioni di pressione. Le componenti periodiche furono misurate e si vide che raggiungevano anche valori pari al 35% della pressione dinamica della corrente esterna. I lavori di Krishnamurty (da cui risultavano forti radiazioni acustiche della cavità) e quello di Rossiter (sulla presenza di un meccanismo di risonanza responsabile delle fluttuazioni periodiche di pressione nella cavità) furono scoperte veramente illuminanti per la descrizione dei meccanismi di oscillazione del flusso basati su risonanza acustica specie per flussi su cavità. Studi successivi su queste problematiche hanno condotto ad una classificazione dei diversi flussi su cavità a secondo della distribuzione di pressione che si instaura sul pavimento della cavità e che dipendono principalmente dalla geometria della cavità. Questi flussi su cavità sono in genere divisi in cavità aperte, cavità chiuse e flussi intermedi. Negli anni 80, Stallings & Wilcox [129] nel 1987 arrivarono poi a suddividere i flussi intermedi in altre 2 categorie note come flussi transizionali aperti e flussi transizionali chiusi. In questa test, poiché siamo interessati a flusso su cavità aperte ci concentreremo solo su queste ultime e su cui si fornirà una maggiore dettagliata rivisitazione dei lavori esistenti.

2.1 Flussi su cavità aperte

I flussi sulle cavità aperte hanno un carattere più organizzato rispetto ai flussi che si verificano negli altri casi ed inoltre spesso questi sono dominati da fenomeni altamente periodici. Come abbiamo già detto questi tipi di flusso sono presenti in molte applicazioni aerospaziali, tali come gli alloggi per le ruote degli aerei, le baie per le armi ed altre aperture sulla fusoliera generalmente usate per installare sensori. Un flusso instazionario che investe la cavità dà vita ad uno *free shear layer* oscillante quando il flusso separa dal primo spigolo della cavità. Lo *shear layer* che si stacca dal primo spigolo supera la cavità e riattacca in un punto sulla parte a valle, formando così nella cavità un grande vortice vincolato al suo interno. Quando il flusso nella cavità è stabile una distribuzione di pressione statica quasi uniforme in direzione longitudinale si instaura in essa. Ad ogni modo, forti toni acustici possono svilupparsi a causa delle forti interazioni tra le instabilità nello *shear layer* ed i vortici presenti nella cavità. Questi toni acustici ad alta

intensità che si verificano per frequenze specifiche, possono innescare vibrazioni strutturali dei componenti dell'aereo e delle strutture limitrofe dando luogo a fatica strutturale. Sono state condotte numerose ricerche per approfondire le conoscenze sulla dinamica del flusso nella cavità come quelle condotte da Krishnamurty [88]; Rossiter [131]; Charwat [8],[9]; Rockwell & Naudascher [38], [39], e oggi si può finalmente affermare che flussi su cavità aperta possono produrre delle oscillazioni che si auto-sostengono e delle interazioni tra i vortici che si staccano all'interno e all'esterno della cavità. La figura 2.1 mostra una rappresentazione schematica e semplice del modello del campo di moto medio che si instaura sulla cavità e dentro la cavità sia per velocità subsoniche che supersoniche. Queste oscillazioni sono da evitare perché possono indurre vibrazioni e fatica strutturale, emissione di rumore e un aumento medio della resistenza.

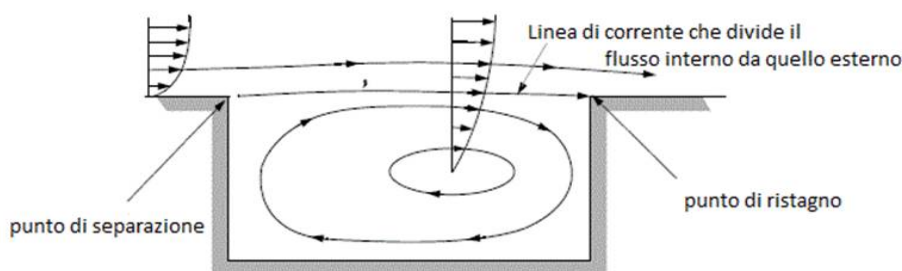


Figura 2.1: Schema del modello del campo di moto sulla cavità aperta.

2.2 Flussi in cavità chiuse

I flussi in cavità chiuse sono associati con cavità che hanno un rapporto L/D tipicamente più grande 13. In questo tipo di regime di flusso, lo *shear layer* si forma dallo strato limite (che arriva) che separa al bordo d'attacco della cavità per poi riattaccare lungo il fondo stesso della cavità, prima di separare nuovamente a valle davanti alla seconda parete verticale della cavità. Ciò crea due distinte regioni di separazione del flusso, una a valle della parete verticale anteriore ed una a monte della parete verticale posteriore. Questi flussi sono caratterizzati da gradienti di pressione statica avversi lungo il fondo della cavità. Il flusso di una cavità chiusa a velocità subsoniche è anche caratterizzato dal rispondere come un modo scia in quanto esibisce un comportamento simile alla scia di corpo tozzo dato che presenta delle

fluttuazioni di pressione che sono generalmente in natura di larga banda. Gharib & Roshko [97] hanno studiato i campi di moto della cavità chiusa e hanno trovato che sono simili alle scie dei corpi tozzi, da cui il nome. In questa categoria di flussi di cavità, oscillazioni autonome cessano (a differenza dei flussi in cavità aperte) ed il flusso di cavità diventa instabile su una scala macro che provoca un notevole incremento della resistenza. La distribuzione di pressione per questa classe di flussi consiste in tre distinte fasi associate alla dinamica del flusso. Il brusco gradiente longitudinale di pressione statica presente nell'interno della cavità può pericolosamente causare grandi momenti di *pitching* su ogni regione di ri-circolazione. Un tipico campo di moto per cavità chiusa sia a velocità subsonica che supersonica è mostrato in figura 2.2.

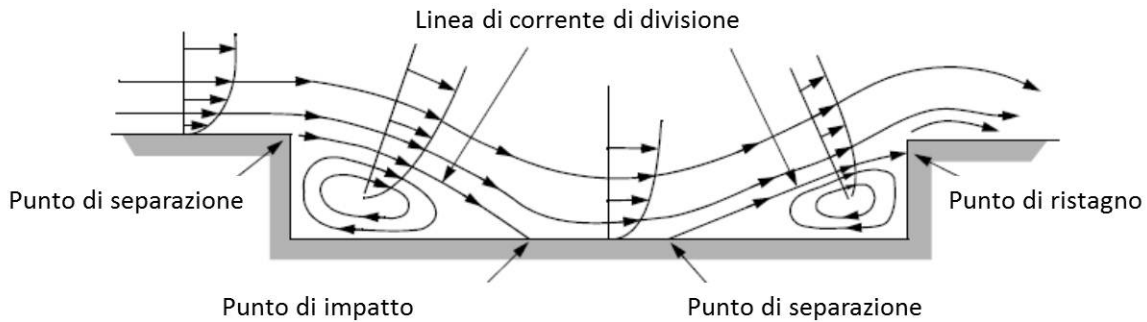


Figura 2.2: Esempio di campo di moto in una cavità chiusa sia in regime subsonico che supersonico.

2.3 Meccanismo delle Oscillazioni su cavità

Sono stati condotti molti studi per capire la dinamica dei fluidi associata alle oscillazioni del flusso sulle cavità. Krishnamurty, Plumblee, Rossiter, Gharib & Roshko sono soli i più famosi. Il campo di moto delle cavità aperte può presentare oscillazioni del flusso con caratteristiche diverse che dipendono dalle condizioni del flusso (Numero di Mach, numero di Reynolds) e dalla geometria delle cavità. Rockwell & Naudascher [38] classificò queste oscillazioni in 3 diverse categorie.

2.3.1 Oscillazioni Fluidodinamiche

Questo tipo di oscillazioni si verificano nelle cavità con lunghezza corte rispetto alla lunghezza d'onda acustica. Le frequenze di queste oscillazioni sono riconducibili all'amplificazione delle fluttuazioni di vorticità all'interno dello *shear layer* della cavità. Il meccanismo principale per l'esistenza di queste oscillazioni è l'amplificazione dei disturbi presenti nello *shear layer* della cavità e questo processo è fortemente incentivato dalla presenza del secondo spigolo della cavità. Il secondo spigolo favorisce la propagazione a monte dei disturbi, è proprio questo secondo spigolo a rappresentare la condizione di *feedback*. Due parametri possono essere responsabili dell'esistenza di queste oscillazioni: la condizione di amplificazione selettiva dello *shear layer* ed il processo di *feedback*. L'amplificazione selettiva delle instabilità dello *shear layer*, che causa l'amplificazione di alcuni disturbi più di altri, è necessario per la generazione delle oscillazioni di grande ampiezza. Questa però non è una condizione sufficiente perchè, senza l'esistenza di un effettivo meccanismo di *feedback*, le oscillazioni sarebbero smorzate.

2.3.2 Oscillazioni Fluido-Risonanti

Le oscillazioni fluido-risonanti della cavità si verificano quando l'oscillazione è fortemente accoppiata con effetti d'onda risonanti dentro la cavità. Per questa classe di oscillazioni, le frequenze sono sufficientemente alti tali che la lunghezza d'onda acustica è generalmente dello stesso ordine di grandezza della lunghezza caratteristica della cavità come per esempio la lunghezza L oppure la larghezza W . Nell'ambito del regime del flusso aperto, la natura delle oscillazioni del flusso è ancora dipendente dal rapporto L/D . Secondo Tracy & Plentowich [100] se il valore di L/D è sufficientemente grande, le onde stazionarie longitudinali possono esistere e la cavità è definita come cavità poco profonda. Analogamente secondo East [51], le onde trasversali possono esistere per cavità aventi valori del rapporto L/D sufficientemente piccolo, e questo tipo di cavità è quindi detta cavità profonda. Sebbene i valori di L/D che definiscono queste due classi non sono stati univocamente identificati, il comportamento delle cavità poco profonde si verifica di solito quando $L/D > 1$, mentre il comportamento delle cavità profonde di solito si verifica quando $L/D < 1$ secondo Rockwell & Naudascher [38]. Lo sviluppo di uno di questi 2 modi risonanti di oscillazione dipende da diversi eventi interagenti. Per cavità profonde a basso numero di Mach fu riscontrato nel lavoro di East[51] che oscillazioni a frequenze discrete esistono solo per un limitato intervallo di velocità, indicando un efficace discreto meccanismo di *feedback* nello *shear layer* piuttosto che di

una energia di disturbo a larga banda dello *shear layer* che è principalmente responsabile per la risonanza. Per i tipi di geometria e condizioni di flusso studiate si è visto che la frequenza di risonanza decresce quando la lunghezza o la profondità della cavità aumentano.

2.3.3 Oscillazioni Fluido-Elastiche

Quando una o più delle pareti della cavità si possono elasticamente deformare di una certa estensione in modo tale da realizzare il meccanismo di *feedback* delle instabilità dello *shear layer*, allora le oscillazioni fluido-elastiche si possono verificare. Infatti, si può assumere che la struttura vibrante ha gli stessi effetti che l'onda risonante ha nelle oscillazioni fluido-risonanti. L'amplificazione delle instabilità dello *shear* avviene attraverso un processo tipo risonante come nelle oscillazioni fluido-risonanti e la risposta in frequenza del sistema è la stessa delle curve di frequenza naturale di un oscillatore strutturale. Questo tipo di oscillazione è molto complesso e più difficile dei 2 casi precedenti perché c'è una interazione flusso-struttura inerente al sistema. Questa interazione richiede un account per caratteristiche inerziali, elastiche e smorzamento strutturale e le loro interazioni reciproche mentre descrivono il meccanismo di oscillazioni auto-sostenute. Questo tipo di instabilità comunque non sono oggetto di studio in questa tesi.

2.4 Instabilità in Cavità - Studi e Progressi

Le osservazioni fatte durante gli studi sulle cavità confermano che qualunque tipo di cavità comporta un aumento del rumore radiato. Durante gli studi eseguiti da Yu [95] sono state eseguite misure di rumore nel *Far Field* si è visto che la potenza acustica è direttamente proporzionale alla sesta potenza delle velocità della corrente libera nel caso di cavità poco profonde, mentre nel caso di cavità profonde, è proporzionale quasi alla quinta potenza (per esattezza a 4.7). I dati pubblicati per le ampiezze delle oscillazioni evidenziano comunque una dispersione notevole anche nel caso di geometrie delle cavità e numero di Mach simili. Secondo Colonius [[28]] questo effetto è principalmente dovuto alle differenze che gli strati limiti presentano alla separazione e che si ripercuotono sulle caratteristiche di instabilità degli *shear layers* che si sviluppano ed espandono sulla cavità.

2.4.1 I modi Acustici o di Rossiter

Una prima descrizione sui fenomeni che governano cavità poco profonde è sicuramente da attribuire a Rossiter che nel suo primo lavoro [131] sviluppò l'idea che dietro a queste instabilità ci fosse un ciclo di *feedback* acustico, simile a quello teorizzato da Powell [122] nel suo lavoro su *edge-tones*. Secondo Rossiter piccole instabilità presenti nello *shear layer* che si genera quando il flusso si separa dal primo spigolo della cavità, come mostrato in figura 2.1, interagiscono con il secondo spigolo, su cui il flusso va ad impattare, generando delle onde acustiche che propagano a monte creando nuovi disturbi nello *shear layer*. Questo fenomeno risulta istantaneo nel caso di flussi incomprimibili, cioè l'influenza a monte si risente istantaneamente, mentre nel caso di flussi comprimibili si verifica con un ritardo acustico. Le perturbazioni con una certa frequenza tendono a rinforzarsi finché non si arriva alla saturazione. A quel punto si verifica la risonanza.

Questo tipo di instabilità è noto come *shear layer mode* anche detto *Rossiter, mode* ed è diverso dalla pura risonanza acustica dove la frequenza di risonanza dipende solo dalla velocità del suono e dai parametri geometrici delle cavità. Rossiter durante i suoi studi [131] condusse una vasta campagna sperimentale su cavità bidimensionali facendo variare il rapporto tra lunghezza e profondità della cavità e il numero di Mach, ottenendo così una serie di frequenze di oscillazioni. Per predire le frequenze di risonanza egli sviluppò una formula semi-empirica basata sul processo di *feedback* e cioè:

$$St_n = \frac{f_n L}{U} = \frac{n - \alpha}{M + \frac{1}{k}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

dove St_n è il numero di Strouhal corrispondente all'n-mo modo avente frequenza f_n . I parametri empirici k ed α corrispondono alla velocità media di convezione dei disturbi vorticosi presenti nello *shear layer* ed il ritardo di fase rispettivamente. Tipicamente $\frac{1}{k} = 1,75$ ed $\alpha = 0,25$. Diversi esperimenti hanno mostrato un buon accordo con questa formula sebbene con una significativa dispersione da attribuirsi principalmente a differenze nelle condizioni sperimentali (cioè differenze nei parametri caratterizzanti la geometria della cavità e nei parametri del flusso). Questi parametri non compaiono nella formula di Rossiter ma essi possono influenzare significativamente la frequenza di risonanza. Inoltre la formula non fornisce informazioni sul verificarsi o meno della risonanza né su quali modi sono presenti e se qualcuno di questi modi sarà dominante.

2.4.2 Modi di Scia

Gharib & Roshko nei loro studi incomprimibili [96] hanno trovato altri meccanismi di instabilità nei flussi su cavità quando le cavità iniziano a diventare profonde. Questi risultati sono stati confermati dalle simulazioni numeriche (DNS) fatte da Rowley [30]. Questo modo di oscillazione è caratterizzato da vortici di grande scala che si staccano dallo spigolo delle cavità, un po' come accade per la scia a valle di un corpo tozzo. Ed è proprio da questa somiglianza che discende il nome modo di scia. Quando il grande vortice, avente dimensione della profondità della cavità, si forma vicino allo spigolo della cavità, la corrente libera penetra nella cavità ed impatta sul suo fondo. Successivamente il vortice viene rilasciato dallo spigolo e viene violentemente espulso dalla cavità provocando un forte aumento di resistenza. Questo modo di scia è stato osservato in molte simulazioni numeriche bidimensionali come per esempio in [44], [2], [30], [75], ma esistono pochi risultati sperimentali che ne danno evidenza. Questo modo di scia sembra che venga soppresso dagli effetti tridimensionali. Alcuni autori attraverso l'applicazione della *Large Eddy Simulations*, [27], hanno dimostrato che introducendo disturbi tridimensionali nello strato limite che investe una cavità 2D, in cui è presente un modo di scia, si ha la soppressione di questi ultimi con l'instaurarsi del modo di Rossiter. Studi simili sono stati condotti da Suponitsky [149] che ha confermato questi risultati.

2.4.3 Oscillazioni auto sostenute e forzate

A bassi numero di Mach, ci sono alcune risonanze acustiche di cavità aventi particolari geometrie che complicano ancora di più l'identificazione del meccanismo che conduce la cavità alla risonanza. Una risonanza puramente acustica può portare ad una discordanza e/o ad un rinforzo dei modi acustici di *shear layer*. Rowley [32] ha dimostrato che le oscillazioni osservate negli esperimenti non sempre sono del tipo auto-sostenute previste da Rossiter. In verità, in molti casi addirittura le oscillazioni sembrano forzate o dalla turbolenza dello strato limite o da altre sorgenti esterne di rumore. Questo aspetto è fondamentale nel caso in cui si voglia effettuare il controllo del flusso perché può avere forti implicazioni nel progetto del *feedback control* come si può intuire del lavoro di Rowley [31]. Recentemente Alvarez, ([70], [71]) ha sviluppato dei modelli che hanno evidenziato che ci possono essere forti interazioni con le risonanze della galleria del vento, e che confermano analiticamente che le oscillazioni non sono sempre auto-sostenute.

2.4.4 Flussi su Cavità Tridimensionali

Nello studio del flusso su cavità 3D recentemente sono stati usati metodi basati sulla *Large Eddy Simulations* (LES) [46],

[90], [84] e altri basati sulla *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) [15]. L'obiettivo primario di questi lavori era trovare le frequenze di oscillazione, la coerenza dei modi (2D) di Rossiter e fino a che punto c'era accordo con le misure sperimentali del flusso medio e con gli spettri. In alcuni di questi lavori, si trovano anche delle osservazioni sulla tridimensionalità delle strutture turbolenti di grande scala, ma queste osservazioni non sono prioritarie in quei studi. Questi dati LES potrebbero essere utili in futuro per esaminare la instabilità identificate in questi studi a valori più alti del numero di Reynolds.

Analogamente, sono pochi i dati sperimentali 3D, anche se alcuni ricercatori hanno osservato effetti tridimensionali nei flussi su cavità. Ahuja & Mendoza [85] eseguirono una vasta campagna sperimentale investigando gli effetti delle dimensioni della cavità, dello strato limite e della temperatura sul rumore di cavità per flussi subsonici con strato limite turbolento a monte della cavità. Essi hanno trovato che il parametro L/W , cioè il rapporto tra lunghezza e profondità presenta un valore per cui si può distinguere tra flussi 2D e 3D. In particolare per $\frac{L}{W} < 1$, la cavità è classificata come bidimensionale dato che il flusso era stato trovato essere uniforme sulla maggior parte della bocca della cavità con uno *shear layer* coerente che si estende per la maggior parte della larghezza della cavità. Invece la cavità è detta 3D quando $\frac{L}{W} > 1$, perché il flusso non può mantenere uno *shear layer* coerente attraverso la sua larghezza a causa del fatto che la cavità è finita e questo fatto provoca una notevole fuoriuscita del flusso da sopra un lato della cavità per rientrare nella cavità dall'altro lato. Essi hanno riscontrato effetti tridimensionali nel flusso medio ed un carico acustico (circa 15 dB) rimane che nel caso di flusso predominante di tipo 2D. Bisogna però anche tener conto che la classificazione fatta da questi autori su cavità bidimensionali è stata fatta considerando nel caso bidimensionale il campo di moto mediato nel tempo e nel caso e nel caso degli effetti 3D questi non sono legati alle instabilità 3D come per esempio nel caso di Bres [20]. Anche Maull & East [35] nei loro esperimenti a basse velocità subsoniche su cavità ampie hanno osservato comportamento di flusso tridimensionale. Usando la tecnica di visualizzazione del flusso d'olio, osservando le linee di corrente sul fondo della cavità e considerando le misure delle distribuzioni di pressione statica hanno dimostrato l'esistenza, in certe condizioni, di un modello quasi costante di cellula nella cavità. La larghezza di ogni cellula era essenzialmente indipen-

dente dalle dimensioni in direzione dell'apertura, ma il modello più regolare di cella esisteva quando la dimensione della cavità in direzione dell'apertura era un numero intero di volte la larghezza della cella preferita. Rockwell & Knisely [37] condussero esperimenti in un canale d'acqua su ampie cavità rettangolari con strato limite a monte laminare e anche essi osservarono effetti tridimensionali. Una tecnica basata sulle bolle d'idrogeno fu usata per visualizzare la struttura del flusso nella cavità in direzione dell'apertura. Recentemente Faure [146] ha mostrato nel suo ultimo lavoro la presenza di strutture tridimensionali, ma nonostante queste osservazioni la fisica del fenomeno non è ancora chiara. Ciò che risulta evidente da questo studio bibliografico è che nel passato, gli studi hanno focalizzato molto sulle cavità 2D trascurando sia gli effetti non-paralleli (crescita dello strato limite) e sia gli effetti 3D. Come conseguenza i modelli sviluppati, specie per il controllo del flusso in cavità, spesso sono inadeguati quando questi effetti 3D diventano importanti. D'altra parte, Trascurare di approfondire le conoscenze sul ruolo giocato dagli effetti 3D significa ignorare la possibilità di sfruttare questi effetti per un controllo passivo delle instabilità.

Capitolo 3

Teoria della Stabilità Globale

Lo scopo della tesi è quello di investigare la stabilità globale di flussi confinati come quelli che si verificano nelle cavità. A questo scopo si ritiene utile una breve introduzione sulla terminologia e sui tipi di instabilità che si possono incontrare per flussi base sia stazionari che instazionari, sia locali che non. La branca della fisica che si occupa della dinamica dei *free shear layers*, delle scie e dei getti o dei flussi confinati quali quelli contenuti in cavità è l'idrodinamica. In questa disciplina sono disponibili gli strumenti per trattare l'evoluzione di piccole perturbazioni sovrapposte ad un flusso imperturbato che viene chiamato flusso base. Il carattere del flusso dipende dalla risposta del flusso alle perturbazioni e possiamo distinguere tre comportamenti

1. Flusso Stabile
2. Flusso agente come Amplificatore
3. Flusso agente come Oscillatore

Questa classificazione fu coniata da Huerre & Monkewitz nel lavoro [112]. Nei flussi stabili, tutti i disturbi esterni fagocitati dal flusso sono smorzati. Invece un flusso agisce come amplificatore se i disturbi sono guidati dall'eccitazione esterna, in seguito le perturbazioni crescono nel tempo in quanto convette dal flusso base. Il parametro di controllo per gli amplificatori è il livello del rumore esterno. In un ambiente perfettamente tranquillo, un flusso di tipo amplificatore rimane imperturbato perché non sussiste la causa che lo eccita. Al contrario, un flusso agisce quale oscillatore se mostra un comportamento auto-eccitante. Qualsiasi perturbazione iniziale che causa persistenti oscillazioni sul flusso o, in generale, che provoca un allontanamento di questo dalle condizioni di equilibrio è un flusso oscillatore perché

esso non ritorna più al suo stato imperturbato anche se si rimuovono le cause. È importante sottolineare che la dinamica di lungo tempo di questo tipo di flusso instabile è intrinseco al flusso, cioè è insensibile al livello di eccitazione esterna, quando le frequenze forzanti sono abbastanza lontane da quelle naturali degli oscillatori.

3.1 Stabilità globale e l'ipotesi di flusso parallelo

I primi flussi ad essere studiati usando l'analisi di stabilità globale sono stato gli *open shear flows*. In particolare, essi sono stati studiati usando la teoria della stabilità locale, per cui solo la direzione trasversale alla direzione della corrente del flusso è una direzione non omogenea. L'evoluzione della perturbazione ad ogni stazione nella direzione della corrente è analizzata studiando la stabilità del flusso parallelo fittizio ottenuto estendendo all'infinito i profili del flusso base dominanti ad ogni stazione (*crosswise*). Nell'approccio locale, l'instabilità può essere sia convettiva che assoluta. Nel caso convettivamente instabile, l'avvezione travolge la propagazione a monte del pacchetto d'onda di piccola ampiezza generata da una perturbazione arbitraria, questa ultima viene trascinata a valle con il flusso mentre sta crescendo come illustrato nella figura 3.1b.

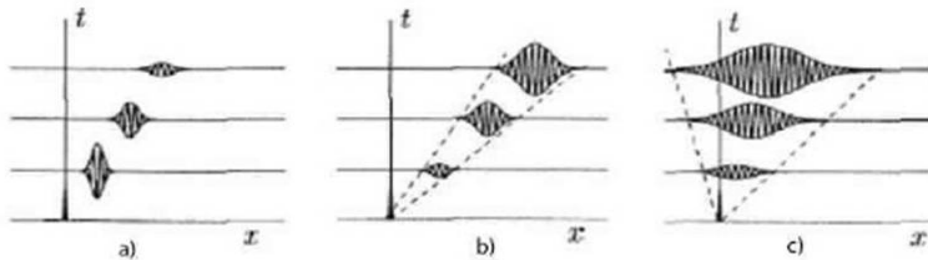


Figura 3.1: Classificazione della stabilità locale di un flusso in termini della risposta d'impulso. a) Stabile, b) convettivamente instabile e c) assolutamente instabile [112]

Di conseguenza, un flusso base che è convettivamente instabile per tutte le posizioni nella direzione della corrente può amplificare le perturbazioni esterne, ma in assenza di una forzante continua, il flusso eventualmente ritorna al suo stato iniziale, cioè si comporta come un amplificatore. Invece, la dinamica dell'oscillatore è associata all'esistenza di regioni assolutamente instabili, dove la diffusione del pacchetto d'onda resiste all'avvezione a valle,

cosicché questa ultima si propaga sia a monte che a valle e, infine, cresce nel tempo per qualsiasi fissata posizione. Questa situazione è illustrata nella figura 3.1c. Da tener presente che per oscillazioni sincronizzate, la dimensione della regione assolutamente instabile deve raggiungere una dimensione critica, che porta ad una dinamica globale come mostrato in Chomaz [78] e in Monkewitz [117]. L'uso dell'analisi di stabilità locale ha il vantaggio di avere bassi costi computazionali, ma essa necessita di criteri addizionali per collegare i risultati di stabilità locale alle dinamiche globali dei flussi oscillatori, dove il flusso è caratterizzato da una selezione di frequenza e da un modello spaziale nitido. Questo può essere fatto tramite un approccio lentamente variabile oppure un metodo WKRJ (Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys), in cui si assume che le variazioni in direzione della corrente del flusso base sono lente su una lunghezza d'onda di instabilità, in modo che le perturbazioni ad ogni stazione *streamwise* si sviluppano come se il flusso base fosse localmente parallelo. Questa teoria fu originariamente sviluppata per risolvere l'equazione di Gizburg-Landau, cioè un modello unidimensionale per le equazioni di Navier-Stokes, ma poi essa è stata applicata con successo a molti flussi reali. Comunque, scie reali e flussi confinati possono essere localmente fortemente non paralleli e l'assunzione inerente l'approccio locale diventa spesso discutibile. In generale, come vedremo in seguito, non è necessario invocare né l'assunzione di flusso parallelo né quella di debolmente parallelo, e quindi il flusso analizzato rispetto alla sua stabilità può essere una soluzione 2D o 3D delle equazioni del moto.

3.2 Stabilità Globale

Lo sviluppo e l'evoluzione nel tempo e nello spazio di perturbazioni di piccola ampiezza sovrapposte ad un dato flusso base può essere descritto dalle equazioni linearizzate di Navier Stokes, dall'equazione della continuità e dall'equazione della energia. A questo livello, come precedentemente detto, non è necessario fare alcuna ipotesi sulla natura del flusso, cioè se esso sia parallelo o non parallelo, per cui il flusso investigato, almeno rispetto alla stabilità, può essere una qualsiasi soluzione 2D o 3D delle equazioni del moto. Segue la linearizzazione di queste ultime nell'intorno delle soluzioni, che qui vengono considerate per lo più flussi base laminari, stazionari o instazionari, le cui grandezze sono rappresentate come

$$\bar{\mathbf{q}} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{T})^T \quad (3.1)$$

dove ρ sta per densità, u , v e w sono le componenti della velocità e T è la temperatura. I flussi base sono, in alcuni casi particolari, forniti da soluzio-

ni analitiche, in altri sono ottenuti attraverso simulazioni numeriche dirette 2D o 3D, sfruttando potenziali invarianze spaziali. Ora flussi laminari stazionari esistono solo a bassi numeri di Reynolds, ma procedure numeriche sono state sviluppate anche per effettuare il calcolo del flusso base in casi in cui l'instabilità lineare globale si verifica, per esempio, attraverso il metodo della continuazione (si veda Keller 1977 [87] e della frequenza selettiva di smorzamento descritta da *kervik* nel 2006 [49]). Recentemente, l'analisi di instabilità globale è stata estesa all'analisi di flussi base di interesse industriale. Usando la terminologia delle piccole perturbazioni, le soluzioni per il problema del valore iniziale del tipo

$$\mathcal{B}(\bar{\mathbf{q}}; Re; Ma) \frac{\partial \hat{\mathbf{q}}}{\partial t} = \mathcal{A}(\bar{\mathbf{q}}; Re; Ma) \hat{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

vengono denotati con

$$\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) = \left(\hat{\rho}, \hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{T} \right)^T \quad (3.3)$$

che è un vettore che comprende le funzioni ampiezza della densità, delle componenti della velocità e temperatura (o pressione), tutte grandezze non omogenee funzioni delle 3 coordinate spaziali (indicate dal vettore \mathbf{x} e del tempo t).

Gli operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} sono associati alla discretizzazione spaziale delle equazioni linearizzate della continuità, di Navier Stokes, dell'energia, e comprendono lo stato base $\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)$, e le sue derivate spaziali; quando si considerano flussi medi turbolenti, l'equazione 3.2 è estesa coerentemente con il modello di turbolenza adottata. Nel caso particolare di flusso 2D, l'equazione può essere intesa come descrivente l'evoluzione delle funzioni di ampiezza complesse 2D in cui le piccole perturbazioni 3D possono essere decomposte usando l'approccio di Fourier lungo la (singola) direzione spaziale omogenea. Sia nel caso 2D che 3D, l'equazione può essere riscritta come

$$\frac{d\hat{\mathbf{q}}}{dt} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{q}} \quad (3.4)$$

dove $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Nel caso di flusso base stazionario, la possibilità di separare nell'equazione 3.4 la coordinata tempo da quelle spaziali, permette di applicare la decomposizione di Fourier nel tempo che porta alla matrice generalizzata del problema agli autovalori

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{q}} = \omega\mathbf{B}\hat{\mathbf{q}} \quad (3.5)$$

in cui le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} discretizzano gli operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} rispettivamente ed incorporano anche le condizioni al contorno. Volendo invece fare a meno della proprietà di separare il tempo dalle coordinate spaziali, il sistema autonomo rappresentato dall'equazione 3.4 ha la soluzione esplicita

$$\hat{\mathbf{q}}(t) = e^{\mathbf{C}t} \hat{\mathbf{q}}(0) \equiv \mathbf{\Phi}(t) \hat{\mathbf{q}}(0) \quad (3.6)$$

dove $\hat{\mathbf{q}}(0) \equiv \hat{\mathbf{q}}(t=0)$, e la matrice esponenziale $\mathbf{\Phi}(t) \equiv e^{\mathbf{C}t}$, è nota come operatore propagatore (si veda Farrel & Ioannou del 1996 [17]). Una soluzione del problema di valore iniziale dato dall'equazione 3.4 si caratterizza tra il limite per $t \rightarrow 0$ e $t \rightarrow \infty$. Mentre questo ultimo limite può essere descritto dal problema agli autovalori dato dall'equazione 3.5, la crescita σ di una perturbazione iniziale lineare, $\hat{\mathbf{q}}(0)$, può essere calcolata ad ogni istante come

$$\sigma^2 = \frac{\langle e^{\mathbf{C}^*t} e^{\mathbf{C}t} \hat{\mathbf{q}}(0), \hat{\mathbf{q}}(0) \rangle}{\langle \hat{\mathbf{q}}(0), \hat{\mathbf{q}}(0) \rangle} = \frac{\langle \mathbf{\Phi}^*(t) \mathbf{\Phi}(t) \hat{\mathbf{q}}(0), \hat{\mathbf{q}}(0) \rangle}{\langle \hat{\mathbf{q}}(0), \hat{\mathbf{q}}(0) \rangle} \quad (3.7)$$

che permette lo studio della crescita sia di perturbazioni modali che non modali in un quadro unitario. In questo contesto, useremo come implicita la definizione di prodotto interno (\cdot, \cdot) , e l'aggiunto associato $\mathbf{\Phi}^*$ e \mathbf{C}^* delle matrici $\mathbf{\Phi}$ e \mathbf{C} rispettivamente (per ulteriori approfondimenti si rimanda a Morse & Feshbach [121]). Inoltre per completare introduciamo la decomposizione in valori singolari dell'operatore propagatore e cioè

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{C}t} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \quad (3.8)$$

Le matrici unitarie \mathbf{V} e \mathbf{U} comprendono (come loro vettori colonna) gli stati iniziali e finali, rispettivamente, come trasformati dall'azione dell'operatore propagatore, e $\mathbf{\Sigma}$ è diagonale e contiene la crescita σ associata con ogni stato iniziale come il valore singolare corrispondente. Molto simile al caso 1D, la decomposizione in valori singolari può essere utilizzata per calcolare le perturbazioni ottimali. Notiamo anche che l'operatore $\mathbf{\Phi}^* \mathbf{\Phi}$ che compare nell'equazione 3.7 è simmetrico con importanti conseguenze per il loro calcolo. Eriksson e Rizzi nel 1985 [94] hanno discusso per la prima volta nel contesto dell'analisi di instabilità globale l'approssimazione ed il calcolo delle matrici esponenziali. Recentemente un approccio per il calcolo dell'operatore propagatore è stato descritto da Schulze [76] ma esistono anche due articoli uno di Moler del 1978 [23] e l'altro di Van Loan del 2003 [24] che sono importanti per capire l'argomento. Se il flusso base è instazionario, con una dipendenza arbitraria dal tempo, allora l'operatore propagatore $\mathbf{\Phi}(t)$ può essere anche definito, e l'equazione 3.6 può essere generalizzata come:

$$\hat{\mathbf{q}}(t_o + \tau) = \mathbf{\Phi}(\tau)\hat{\mathbf{q}}(t_o) \quad (3.9)$$

Qui il propagatore può essere inteso come l'operatore che fa evolvere la perturbazione di piccola ampiezza dal suo stato al tempo t_o ad un nuovo al tempo $t_o + \tau$. Se la dipendenza temporale dello stato di base è periodica con periodo T , allora $\forall t_o : \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t_o + T) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t_o)$, il propagatore è indicato come l'operatore monodromia e anche T è periodica, $\mathbf{\Phi}(t_o + T) = \mathbf{\Phi}(t_o)$. Esso è definito da (Karniadakis e Sherwin) [63] come:

$$\mathbf{\Phi} = e^{\left[\int_{t_o}^{t_o+T} \mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x};t)) dt' \right]} \quad (3.10)$$

Soluzioni al problema dell'instabilità, che indicano lo sviluppo di perturbazioni di piccola ampiezza durante un periodo di evoluzione, sono ottenute attraverso la teoria di Floquet, che cerca autovalori dell'operatore di monodromia, noti anche come moltiplicatori di Floquet, μ . A questo fine, l'operatore di monodromia viene valutato al tempo T , e il problema all'autovalore

$$\mathbf{\Phi}(T)\bar{\mathbf{q}} = \mu\bar{\mathbf{q}} \quad (3.11)$$

viene risolto. I moltiplicatori di Floquet possono anche essere espressi in termini degli esponenti di Floquet, γ , come $\mu = e^{\gamma T}$, che identificano $|\mu| = 1$ come punto di biforcazione ed indicano che

$$|\mu| < 1 : \text{stabilità periodica del flusso} \quad (3.12)$$

$$|\mu| > 1 : \text{instabilità periodica del flusso} \quad (3.13)$$

3.2.1 Terminologia per la stabilità globale

Generalmente per il caso parallelo 1D o per flussi assialsimmetrici esiste una terminologia ben affermata in cui $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(y)$ oppure $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(r)$ con y e r indicanti le coordinate normali alla parete e quella radiale rispettivamente. In questa tesi ci riferiamo all'analisi locale di modi o all'analisi non modale a seconda se si risolve il problema agli autovalori oppure il problema di valor iniziale rispettivamente. Una esauriente descrizione delle instabilità di questo tipo è fornita dalle monografie di Schmidt e Henningson [116]. Nel caso di instabilità dello strato limite (molto interessante ma anche molto particolare), bisogna considerare una separazione tra le scale su cui si sviluppa lo strato limite di base e le perturbazioni di piccola ampiezza. L'analisi in questo caso è generalmente indicata come analisi dell'instabilità non locale ed è basata sulle equazioni parabolizzate della stabilità (PSE vedere Herbert [68])

anche se Luchini e Donelli [10] hanno dimostrato che gli stessi risultati si ottengono anche attraverso la stabilità lineare applicando la tecnica delle scale multiple e considerando l'ordine 1 per tener conto degli effetti non paralleli. Tuttavia un profano può risultare confuso dall'esistenza in letteratura di un singolo termine, e cioè, instabilità globale per descrivere tre diversi concetti. Il termine analisi di stabilità globale fu introdotta da Joseph nel 1966 [81] all'interno di una metodologia che monitorava l'energia di perturbazione ad ogni istante e stabiliva dei limiti inferiori per la stabilità del flusso. Questo approccio è stato largamente usato sin dal 1960 (come si può dedurre dai lavori di Homsy del 1973 [69], di Reddy e Voyé del 1988 [16]) nel trattamento di flussi $\bar{\mathbf{q}}(y)$ 1D. Per flussi complessi, ancora oggi non esistono lavori in cui limiti sull'energia di stabilità siano stati predetti, sebbene l'energia di perturbazione sia stata monitorata per il flusso in una cavità con parete mobile (*lid-drive cavity*) da Albensoeder nel 2001 [135]. A partire dal 1980, alcuni lavori quali quelli di Pierrehumbert e Widnall del 1982 [133], Eriksson e Rizzi del 1985 [94], e ancora Pierrehumbert del 1986 [120] segnano l'inizio della seconda classe di approcci basati sulla analisi di instabilità globale, cioè quelli basati sulla soluzione del problema agli autovalori pertinenti principalmente flussi base 2D cioè del tipo $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(x, y)$. Nell'ultimo decennio sono apparsi in letteratura lavori sulle soluzioni del problema ai valori iniziali per questi tipi di lavori, mentre nel 2006 compariva il primo lavoro di Tazuke e Suzuki [6] nel quale risolvevano questo tipo di problema per un flusso base 3D ovvero del tipo $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(x, y, z)$.

Oggi ci si riferisce, indifferentemente, all'analisi basata sulla soluzione del problema agli autovalori o al problema di valore iniziale come teoria dell'instabilità Globale con $\bar{\mathbf{q}}$ funzione di due o tre coordinate spaziali con modi globali che denotano gli autovettori $\hat{\mathbf{q}}$, soluzioni dell'equazione 3.5.

Infine, le origini del terzo approccio alla teoria della stabilità globale vanno ricercate nelle idee dell'analisi delle instabilità assolute/convettive, introdotte nel 1960 nell'ambito della fisica del plasma da Briggs nel 1964 [19] ed impiegata fin dalla metà degli anni 80 per analizzare flussi instabili paralleli e debolmente non paralleli. Nel 1990 Huerre e Monkewitx [112] affrontarono questo terzo approccio per flussi paralleli e debolmente non paralleli, seguendo la definizione dei modi globali di Chomaz del 1988 [79]. L'esperienza accumulata in questi decenni porta a ritenere che questi ultimi approcci dell'analisi di stabilità globale condurranno a risultati qualitativamente consistenti ma non necessariamente quantitativamente consistenti. Inoltre, l'identificazione delle soluzioni dell'equazione 3.4 o 3.5 relativamente a flussi 2D o 3D non paralleli con i modi globali come intesi da Chomaz non è necessariamente vera. Per evitare potenziali errori di confusione, Theo-

fillis nel 2001 [150] ha coniato i termini di analisi di stabilità Biglobale e Triglobale per descrivere le analisi (modali o non modali) di stati di base 2D o 3D rispettivamente. Nonostante che questa terminologia sia oggi ampiamente usata, come dimostrano i lavori di Karniadakis e Sherwin del 2005 [63], di Longueteau e Brazier del 2008 [56], di Piot del 2008 [50] ma anche di Groskopf del 2010 [60], ci sono stati altre definizioni alternative come quella di analisi diretta dell'instabilità definita da Barkley nel 2008, oppure quella inventata da Carpenter nel 2010 [101] con la definizione di equazioni linearizzate ed armoniche di Navier Stokes. La necessità di una terminologia che chiarisca il significato dell'analisi globale delle instabilità rischia di generare confusione per il proliferare di troppe definizioni. Il presente lavoro usa le definizioni indicate da Theofilis e cioè di analisi di stabilità Biglobale e Triglobale.

L'analisi non modale biglobale delle instabilità rappresenta un nuovo campo di ricerca e la maggior parte delle analisi di instabilità biglobale eseguite negli ultimi 30 anni impiegano soluzioni numeriche del problema agli autovalori biglobali.

3.3 Alcuni rilevanti aspetti Numerici

Il principale obiettivo per il quale si esegue l'analisi globale delle instabilità è identificare i meccanismi fisici che portano all'amplificazione delle perturbazioni di piccola ampiezza sovrapposti ad un flusso che investe o attraversa geometrie complesse. Dal punto di vista numerico, ci sono una serie di osservazioni da fare, la prima delle quali è

- se bisogna investigare il limite di breve (IVP) o lungo (EVP) tempo, perché questa scelta conduce a matrici simmetriche o asimmetriche rispettivamente;
- se sono possibili eventuali riduzioni dei sistemi di equazioni esaminati, ottenute, per esempio, sfruttando simmetrie o risolvendo un sistema con un numero minore di equazioni;
- se sono coinvolte matrici reali o complesse

Inoltre, un altro importante aspetto riguarda la tecnica da impiegare per la discretizzazione spaziale e se le operazioni di algebra lineare devono essere eseguite su matrici sparse o dense.

Queste considerazioni sono importanti perché influenzano fortemente le dimensioni delle matrici che discretizzano le equazioni linearizzate del moto.

Tali matrici possono diventare poco maneggevoli nonostante le potenze di calcolo oggi raggiungibili. Theofilis nel suo articolo del 2003 [144] sostiene appunto che una analisi di stabilità locale ha matrici delle dimensioni di MB (*MegaByte*), mentre una analisi di stabilità Biblobale e Triglobale sono dell'ordine dei GB e TB (*GigaByte*, *TheraByte*) rispettivamente. Per cui oggi esiste la necessità di introdurre metodi ridotti e semplificati per risolvere l'analisi di stabilità Triglobale come negli anni 90 avveniva per la Biglobale [18]. Qui si fa una breve disamina delle varie tecniche esistenti per la soluzione della stabilità globale mentre nel capitolo 3 saranno approfondite solo le tecniche usate nella presente tesi.

3.3.1 Discretizzazione Spaziale

Quando si discretizza l'operatore spaziale nell'analisi della stabilità globale, occorre scegliere tra metodi ad alto o basso ordine di accuratezza. Questa è una scelta fondamentale. In generale, si possono usare metodi di ordine superiore quando si vuole avere la convergenza pur usando una discretizzazione spaziale con un numero minimo di punti, mentre si possono usare metodi a basso ordine quando non si hanno problemi di memoria (quindi si utilizzano discretizzazioni spaziali molto fitte) e, contemporaneamente, si utilizza algebra lineare su matrici sparse e si usano particolari tecniche per conservare le matrici. In questo ultimo caso, si può spingere la discretizzazione spaziale aumentando la risoluzione della griglia molto di più rispetto a quanto si faccia nel caso dei metodi di ordine superiore finché si ottiene la convergenza.

Metodi Spettrali

I metodi spettrali [21] furono tra i primi metodi ad essere usati per l'analisi di stabilità globale, ed ancora oggi sono molto usati. Pierrehumbert [133], [120] ha risolto le equazioni perturbate di Eulero con questo metodo e più tardi Henningson [67] ha risolto l'equazione 2d di Rayleigh. ma questi metodi sono stati applicati per l'analisi viscosa di stabilità della scia del cilindro [155] e anche per un flusso aperto in un canale scanalato [25], solo per citarne alcuni. Oggi il metodo di collocazione spettrale è molto usato nel calcolo dello spettra Biglobale degli autovalori in un piano [40] e analiticamente trasformato in domini [147] oppure nella analisi Triglobale [136]. L'uso combinato dei metodi spettrali con tecniche multi domini [110], [99] per l'analisi biglobale fu dimostrato da De Vincente [74] e serve a discretizzare geometrie decomponibili in sotto domini regolari. Le tecniche agli elementi spettrali sono state introdotte per l'analisi della stabilità globale di

flussi Newtoniani [25], [33] a e non [59] in cui geometrie regolari sono state discretizzate grazie a griglie strutturate.

Metodi agli elementi finiti e ai volumi finiti

I metodi agli elementi finiti sono stati applicati all'analisi di stabilità globale di geometrie complesse nel momento in cui si sono affermate le tecniche di discretizzazione che usano griglie non strutturate. Una delle prime applicazioni fu l'analisi di stabilità della scia di un cilindro circolare [77]. Questa tecnica è poi stata usata anche per risolvere il problema agli autovalori per la scia di sfere e dischi [126], nei flussi in cavità con coperchio mobile [152], nei flussi contro-rotanti [127], nei vortici da bordo di uscita [91] ma anche nell'analisi Biglobale sia modale che non di un condotto a forma di esse [104]. Infine, recentemente è stato applicato anche per l'analisi Triglobale nelle scie di cilindri e sfere [98].

I metodi ai volumi finiti del secondo ordine sono stati usati per discretizzare le equazioni che descrivono la stabilità globale delle soluzioni cellulari nei flussi di Rayleigh-Benard-Marangoni [45]. Ma sono stati usati anche per analizzare la stabilità del flusso in una cavità quadrata mossa dal coperchio [135] con risultati in eccellente accordo con quelli trovati da Theofilis [143] usando il metodo di collocazione spettrale.

Metodi alle differenze finite

Metodi standard alle differenze finite del secondo ordine sono stati usati per l'analisi delle scie di un cilindro circolare [43], [98]. Ancora oggi sono molto usati sia per l'analisi di instabilità che per la sensitività di flussi incomprimibili intorno ad un gradino in avanti [92] o per la scia del cilindro [53]. In questo ultimo caso usando un approccio ai contorni immersi. Recentemente una applicazione di stabilità Triglobale ad una cavità cubica mossa dal coperchio in flusso incomprimibile è stata condotta da Giannetti [11]. Egli ha discretizzato l'operatore 3D delle equazioni linearizzate di Navier Stokes usando un metodo alle differenze finito accurato al secondo ordine, *staggered*. Questa tecnica è stata applicata anche al campo dei flussi comprimibili, infatti è stata eseguita l'analisi non viscosa del flusso transonico intorno al profilo NACA-0012 impiegando un metodo *variable - order* alle differenze finite [89]. Metodi compatti alle differenze finite di ordine superiore sono stati usati per risolvere la stabilità globale di una cavità aperta [?] ma anche per uno strato limite su un bordo d'attacco a freccia [22] in regime comprimibile. Sempre in regime comprimibile ma ad alto numero di Reynolds, Crouch [73] condusse la prima analisi di stabilità globale di un

flusso turbolento che comprendeva anche il fenomeno dell'onda d'urto nell'analisi. Per catturare l'influenza dell'onda d'urto sugli autovalori globali fu usato una combinazione di schemi alle differenze finite con diversi ordini di accuratezza, e cioè centrate al quarto ordine e *up - wind* del terzo ordine. Per la convergenza della instabilità globale, in questi metodi, la scelta di una discretizzazione con accuratezza inferiore può essere compensata con l'aumento dei gradi di libertà (cioè dei punti griglia che oggi hanno un ordine di grandezza del tipo 10^6).

Ciò che emerge e che l'analisi di stabilità globale è strettamente vincolata ai limiti computazionali del calcolo scientifico. Ovviamente, per il successo dell'analisi di stabilità globale conta moltissimo l'efficienza dell'algoritmo per la ricostruzione dello spettri successivamente usato.

3.3.2 Condizioni al Contorno per l'analisi di stabilità globale

Le equazioni alla base della stabilità globale sono ellittiche e necessitano di alcune condizioni per chiudere il problema. Bisogna dire che esiste solo un caso in cui le condizioni al contorno sono ben chiare ed è il caso di parete solida, dove condizioni di flusso viscoso o non viscoso possono essere usate a secondo del tipo di analisi che si sta eseguendo e della variabile che si sta trattando. All'infinito di un sistema aperto, la situazione è molto simile a quella che si ha nell'analisi dell'instabilità locale, cioè perturbazioni che diventano evanescenti all'infinito, oppure si possono derivare condizioni al contorno analitiche ed utilizzarle [7]. Invece, la condizione di ingresso ed uscita dei sistemi aperti vanno trattati in modo diverso. In ingresso, nell'ipotesi di alto numero di Reynolds [98], [126] o per prevenire l'arrivo di disturbi viscosi [143], si può fare un ragionamento di tipo inviscido ed imporre condizioni al contorno omogenee di Dirichlet. Alcune condizioni al contorno non troppo rigide sono state provate per il flusso in uscita, come ad esempio, le condizioni di *standardzero - normal - stress* tipicamente usate nei metodi agli elementi finiti [77], oppure si possono usare le condizioni paraboliche di uscita del flusso [3], o quelle di estrapolazione lineare [143], [145]. Queste condizioni tipicamente portano alla formazione di una stretta non fisica regione adiacente al confine di uscita, che viene eliminata nella fase di *post - processing* dei risultati, mentre le principali caratteristiche del campo rimangono invariate. Sebbene ciò possa essere giustificato solo da un controllo a posteriori dell'indipendenza dell'autospettro e della distribuzione spaziale della funzioni di ampiezza dai parametri quali l'estensione del dominio, questo approccio euristico ha fornito risultati di analisi di stabilità globale coerenti in una varietà di flussi su corpi tozzi, nonché ad alcune

scoperte nei flussi tipo strato limite, come quello del modo stazionario 3D globale della separazione laminare [143] e la struttura polinomiale degli autovalori globali in un flusso incomprimibile su un bordo d'attacco a freccia [142], [145].

Capitolo 4

Metodi Numerici e Codici di Calcolo

4.1 Cenni ai Metodi alle Differenze Finite

Il metodo alle differenze finite è stato il primo ad affermarsi grazie soprattutto alla sua semplicità concettuale. Il metodo delle differenze finite, come i precedenti metodi, permette di trovare la soluzione numerica di un'equazione o di un sistema di equazioni differenziali. La modellizzazione matematica di un sistema fisico conduce sempre ad equazioni differenziali le cui soluzioni sono funzioni di una variabile, ad es. il tempo. La ricerca diretta di tali funzioni è un problema che si sa risolvere esplicitamente soltanto in pochi casi. In assenza di una forma esplicita è importante determinare una soluzione approssimata che permetta di stabilire comunque le proprietà della funzione. I valori approssimati della soluzione sono calcolati per un numero discreto di valori della variabile indipendente. L'equazione differenziale è trasformata in una equazione in cui compaiono le differenze finite tra valori consecutivi della variabile indipendente e dei corrispondenti valori delle funzioni cercate. Ciò permette di scrivere equazioni algebriche nelle quali un valore della funzione dipende dall'incremento scelto per la variabile indipendente e dai valori immediatamente precedenti della funzione stessa, oltre che dai coefficienti costanti che compaiono nell'equazione differenziale che sono i parametri del sistema. I valori della variabile indipendente costituiranno un vettore di N elementi distanziati tra loro di un valore costante $dt = T/N$ se T è l'ampiezza dell'intervallo della variabile indipendente. La soluzione approssimata è, a sua volta, un vettore di N elementi distanziati tra loro di un incremento variabile dy che dipende dalla struttura dell'equazione diffe-

renziale e dai suoi parametri. Si può in genere riconoscere che l'ennesimo termine è funzione di alcuni valori immediatamente precedenti, è cioè definito in maniera ricorsiva. La differenza tra l'indice dell'elemento calcolato ed il più piccolo degli indici degli elementi precedenti da cui esso dipende, definisce l'ordine dell'equazione. Se l'ordine è k , i primi k elementi del vettore sono costanti da definire. Al variare del loro valore si ottengono soluzioni diverse. Pertanto esse andranno scelte in base alle condizioni iniziali che, insieme all'equazione differenziale, definiscono l'oggetto di studio.

4.1.1 Approssimazione alle differenze finite

Il metodo delle differenze finite si basa sull'approssimazione delle derivate parziali prime e seconde che compaiono nelle equazioni differenziali mediante differenze dei valori finiti che la funzione da differenziare assume in alcuni punti del dominio in cui è definito il problema. In particolare, si sovrappone al dominio una griglia di punti (detti nodi) che per semplicità supporremo equi-spaziati (con h indicheremo la distanza tra due nodi vicini); in una dimensione, ad esempio, la funzione f (di una sola variabile) può essere sviluppata nell'intorno del generico punto x come:

$$f(x+h) = f(x) + hf^I(x) + \frac{h^2}{2}f^{II}(x) + \frac{h^3}{3!}f^{III}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(x) + \dots \quad (4.1)$$

oppure come:

$$f(x-h) = f(x) - hf^I(x) + \frac{h^2}{2}f^{II}(x) - \frac{h^3}{3!}f^{III}(x) + \frac{h^4}{4!}f^{IV}(x) - \dots \quad (4.2)$$

Sommando le due serie si ottiene

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f^{II}(x) + \frac{h^4}{12}f^{IV}(x) + \dots \quad (4.3)$$

e quindi, se si tronca la serie alla derivata seconda:

$$f^{II}(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \quad (4.4)$$

Se h è abbastanza piccolo, l'espressione 4.4 fornisce il valore della derivata seconda calcolata alle differenze finite centrate. L'errore commesso sarà quindi:

$$\frac{\frac{h^4}{12}f^{IV}(x)}{h^2} \quad (4.5)$$

cioè proporzionale a h^2 ed al tendere di h a zero, tenderà rapidamente ad annullarsi. Procedendo in modo analogo è possibile derivare le espressioni della derivata prima, il cui errore di troncamento sarà comunque proporzionale a h^2 .

È possibile comunque derivare tre diversi schemi alle differenze finite che vengono denominati *Forward* quando le derivate sono calcolate attraverso una espansione sui punti successivi allo i -esimo, *Backward* quando le derivate sono calcolate attraverso una espansione sui punti precedenti allo i -esimo ed infine centrato come quello appunto prima presentato.

Tutti questi schemi forniscono una valutazione delle derivate con un errore proporzionale ad h^2 e per questo sono accurate al secondo ordine. Ad ogni modo, attraverso procedure simili a quelle precedentemente viste è possibile ottenere formule alle differenze finite con ordine superiore. Ovviamente la loro derivazione coinvolge un numero maggiore di punti a monte e valle del nodo i -esimo.

Riportiamo un esempio dell'applicazione della tecnica delle differenze finite. Consideriamo la seguente equazione di Poisson

$$\nabla^2 u = -f \quad (4.6)$$

definita su un domino quadrato con condizioni al contorno alla Dirichlet. Si può procedere nel seguente modo; si assume, per esempio, che la griglia sia uniforme in direzione x e y e che i passi per entrambe le direzioni siano di ampiezza h . Indichiamo con n il numero dei punti in entrambe le direzioni x e y . Allora la rappresentazione del $(\nabla^2 u)_{i,j}$ è data:

$$(\nabla^2 u)_{i,j} \approx \frac{1}{h^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) + \vartheta(h^2) \quad (4.7)$$

Questa può essere riscritta come:

$$u_{i,j} \approx \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - h^2 \nabla^2 u)_{i,j} \quad (4.8)$$

Assumendo che $f = -\nabla^2 u$ sia noto all'interno, questa è una singola equazione in cinque incognite (meno se il punto è prossimo al confine). Comunque, si potrebbe in teoria scrivere la corrispondente equazione per ogni punto interno, ottenendo un sistema di n^2 equazioni in n^2 incognite. Possiamo poi passare a scrivere il tutto sotto forma matriciale. Nell'ipotesi che la soluzione sia unica, questa può essere trovata invertendo una matrice di dimensioni $n^2 \times n^2$. Questa è una operazione dell'ordine di $\vartheta(6)$ che essendo così grande non è confortevole da fare. Però la matrice è sparsa (ogni matrice avrà almeno cinque termini diversi da zero) e metodi come Gauss-Seidel

o di tipo *Successive Over Relaxation* possono essere usati per trovare una soluzione con l'accuratezza desiderata. Uno dei maggiori svantaggi che viene dall'uso del metodo alle differenze finite è che non sono molto comodi quando bisogna trattare domini irregolari perché bisogna spendere molto tempo per eseguire interpolazioni dei valori al contorno sui punti vicini della griglia. Una griglia uniforme, inoltre, verrà impiegata anche in regioni dove non è necessaria una elevata accuratezza con uno spreco di tempo computazionale. D'altra parte l'uso di griglie non uniformi abbassa l'ordine di accuratezza del metodo perché introduce nell'espansione in serie di Taylor termini di ordine superiore che non vengono più cancellati.

4.2 FreeFem++

FreeFem++ è l'implementazione di un linguaggio dedicato al metodo degli elementi finiti: fornisce strumenti per risolvere problemi basati su Equazioni Differenziali Paraboliche (EDP) o sistemi di EDP anche complessi in forma forte o debole (variazionale). Questo software è open-source e funziona su macchine con sistemi operativi tipo Windows (95,98,2000,NT,XP) oppure su Mac 9 o UNIX. Il software è stato sviluppato presso l'INRIA: l'Istituto Nazionale di Ricerca in Informatica e Automatica Francese. Si tratta di un progetto freeware. Per un eventuale approfondimento sulle problematiche legate al calcolo scientifico in ambito ingegneristico si veda [14], e, in particolare, [102] per applicazioni specifiche in ambito fluido-dinamico

Di questo codice esistono due versioni scritte entrambe in linguaggio C++: Freefem+ [34] e Freefem++ [55], basato su Templates (STL, Standard Templates Library) e Bison per la sua implementazione.

La seconda versione è quella più recente ed è ancora in fase di ultimazione ed estensione per quanto riguarda alcuni aspetti (integrazione, differenziazione, decomposizione di domini, implementazione 3D e nuovi metodi di trattamento delle griglie); presenta molte novità rispetto alla versione precedente anche dal punto di vista implementativo: permette di risolvere problemi differenziali con elementi finiti in opportuni spazi funzionali, su griglie arbitrarie, non strutturate e adattate. Gli autori del codice sono Frederich Hecht, Olivier Pironneau, Antoine Le Hyaric e Kohji Ohtsuka. Il codice si presta non solo per apprendere l'uso dei metodi alle differenze finite, ma anche per lo sviluppo di nuove tecniche da applicarsi non solo in ambito fisico, matematico ed ingegneristico ma anche finanziario, grazie, ad esempio, alla possibilità di creare spazi ad elementi finiti arbitrari con griglie non strutturate bidimensionali.

Alcune delle caratteristiche peculiari di FreeFem++ sono:

1. descrizione del problema variazionale con possibilità di accesso a matrici o vettori interni;
2. facile accesso alla geometria tramite descrizione analitica del bordo (anche per pezzi);
3. generatore automatico di griglia basato sull'algoritmo di Varonoi-Delauny, in base al quale la densità dei punti interni dipende dalla densità dei punti al bordo;
4. ampia scelta di elementi finiti triangolari: elementi Lagrangiani lineari o quadratici, elementi di Raviart-Thomas, *mini-element*...
5. velocità di esecuzione prossima a quella ottimale;
6. strumenti per definire elementi discontinui P0, P1dc, P2dc e parole chiavi come *jump*, *intalldges*, *average* ;
7. possibilità di gestire più meshes contemporaneamente e di interpolare dati tra griglie differenti;
8. sistemi accoppiati multi-variabile, multi-equazione, lineari o non, anche con dipendenza temporale; per problemi tempo dipendenti e/o non lineari l'utente deve implementare la discretizzazione temporale e/o la linearizzazione del problema;
9. molti esempi e tutorials tra cui problemi ellittici, parabolici, iperbolici, equazioni di Navier-Stokes ed altri.

La nuova versione permette di scegliere il metodo di risoluzione per i sistemi lineari: LU (*Lower Upper Factorization*), CG (gradiente coniugato), Cholesky, GMRES.

A livello implementativo possiamo distinguere quattro fasi nella risoluzione di un problema differenziale mediante elementi finiti: una prima fase di pre-processing dei dati, che consiste nella costruzione della griglia di calcolo e delle relative strutture dei dati, una seconda nella quale vengono assemblati i vari contributi di ciascun elemento finito al sistema lineare, una terza fase di risoluzione di tale sistema e, infine, un'ultima fase di post-processing per l'analisi dei risultati ottenuti. Solo la seconda fase risulta fortemente dipendente dal tipo di problema che si sta affrontando, le altre possono essere progettate in maniera generale e mantenute invariate anche per problemi differenziali assai diversi tra di loro. Per chiarezza viene fornito uno schema in (Figura 4.1) che riassume le fasi di cui si compone la risoluzione di un

problema mediante elementi finiti, all'interno del quale, per completezza, si riportano i vari passaggi secondo l'ordine e la struttura delle varie funzioni implementate in freefem, a cui si è ricorso.

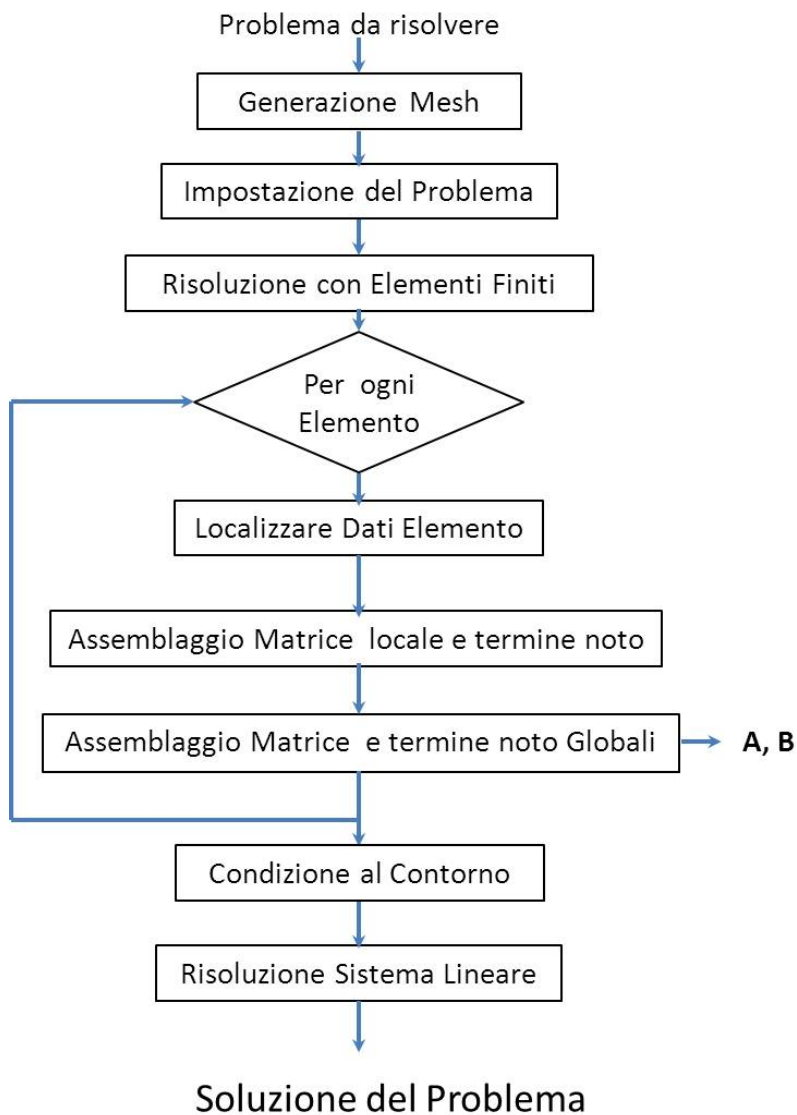


Figura 4.1: Diagramma riassuntivo per la risoluzione di un problema differenziale mediante elementi finiti implementato con Freefem

4.2.1 Generatore di Griglia Bamg

Freefem utilizza un codice per la creazione automatica e per il trattamento delle griglie di calcolo, ossia una reticolazione del dominio in unità geometriche più semplici (in due dimensioni triangoli o quadrilateri) che soddisfano determinate condizioni: si tratta del codice BAMG, *Bidimensional Anisotropic Mesh Generator* [66], sviluppato sempre presso l'INRIA. Tra le caratteristiche di Bamg segnaliamo la possibilità di

- Dato un set di punti, la triangolazione di Delaunay è unica, a parte situazioni particolari quali quelle in cui M punti (con $M > 3$) giacciono su una circonferenza.
- Tra tutte le triangolazioni possibili la triangolazione di Delaunay è quella che massimizza il minimo angolo dei triangoli della griglia (proprietà max-min).
- L'insieme formato dall'unione dei triangoli è la più piccola figura convessa che racchiuda il set di punti dato.

La terza proprietà rende l'algoritmo di Delaunay inutilizzabile per domini non convessi, esiste però una variante chiamata algoritmo di Delaunay vincolato (*constrained Delaunay triangulation*) che permette di fissare a-priori un insieme di lati della griglia da generare. In particolare, si possono fissare i lati che definiscono la frontiera della griglia: tale versione è risultata molto potente ed è stata utilizzata in questo lavoro (essa usa gli elementi di Taylor-Hood). Dati due punti $P1$ e $P2$ diremo che essi sono reciprocamente visibili se il segmento $P1P2$ non attraversa nessuno dei lati di frontiera (o, in generale, i lati che si vogliono fissare). Una triangolazione di Delaunay vincolata soddisfa la proprietà che l'interno del cerchio circoscritto a ciascun triangolo K non contiene alcun nodo che sia visibile da un punto interno di K . Anche in questo caso la triangolazione è unica e soddisfa la proprietà max-min. Una volta generata la griglia può rendersi necessario un ulteriore trattamento allo scopo di migliorarne la regolarità : come già accennato, Bamg fornisce anche questa possibilità, permettendo di trasformare la griglia mediante operazioni che migliorano la forma dei triangoli; in particolare, implementa tecniche di regolarizzazione che modificano le caratteristiche topologiche della griglia (scambio delle diagonali) e altre che ne modificano le caratteristiche geometriche (baricentrizzazione). In particolare

- Lo scambio delle diagonali è una tecnica che consente di modificare la topologia della griglia senza cambiare la posizione e il numero dei

suoi nodi. Tale tecnica si basa sul fatto che un quadrilatero, formato da due triangoli aventi un lato in comune, può essere tagliato in due modi diversi in coppie di triangoli. In genere lo scambio delle diagonali viene utilizzato per migliorare la qualità delle griglie non strutturate seguendo un criterio di ottimo prefissato.

- Un altro metodo per migliorare la qualità della griglia consiste nel muovere i punti della stessa senza modificarne la topologia mediante baricentrizzazione. Consideriamo un nodo interno P e l'insieme KP di elementi che lo contengono. KP viene indicato come *patch* di elementi associato a P . Una tecnica di regolarizzazione, detta regolarizzazione Laplaciana, consiste nello spostare P nel baricentro del poligono PP formato dall'unione degli elementi di KP : tale procedimento viene effettuato su tutti i nodi della reticolazione.

Oltre agli algoritmi di regolarizzazione, qui presentati, che tendono a rendere uniforme la griglia, Bamg permette anche di ricorrere all'adattabilità iterativa della griglia di calcolo.

4.2.2 Freefem e la cavità 2D

A scopo didattico sono stati eseguiti alcuni calcoli sulla cavità 2D allo scopo di prendere confidenza con il codice Freefem. Il manuale di Freefem riporta la soluzione di diversi problemi fluidodinamici. Tra questi anche il campo di moto su una cavità 2D in cui un liquido è in movimento a causa del moto del coperchio che si muove a velocità costante e unitaria. Le equazioni di Navier Stokes per un numero di Reynolds pari a 1000 vengono risolte calcolando il campo delle velocità e delle pressioni nella cavità. In questa fase dello studio, si è preferito investigare gli effetti della distribuzione dei punti della griglia non strutturata sulla soluzione. Per questi calcoli sono state considerate le discretizzazioni riportate nella tabella 4.1, dove vengono indicati anche il numero dei vertici, il numero dei triangoli della griglia ed il tempo di calcolo.

La figura 4.2 mostra le griglie utilizzate in questo esercizio. Dalla griglia A alla B, il numero dei punti raddoppia, così come dalla B alla C e dalla C alla D.

In figura 4.3 vengono riportate le linee di corrente che si generano all'interno della cavità. Purtroppo il codice di grafica non è molto flessibile e comodo da maneggiare, quindi non è stato possibile alterare il numero delle linee di corrente. Di conseguenza non è facile apprezzare, almeno in questo caso, le differenze che pure esistono.

<i>Mesh</i>	N. Reynolds	n. vertici	n. Triangoli	Tempo calcolo
20×20	1000	441	800	0.41 s
40×40	1000	1681	3200	2.38 s
80×80	1000	6561	12800	19.3 s
160×160	1000	25921	51200	227.42 s

Tabella 4.1: Caratteristiche della *mesh* per i calcoli sulla cavità 2D e numero di Reynolds.

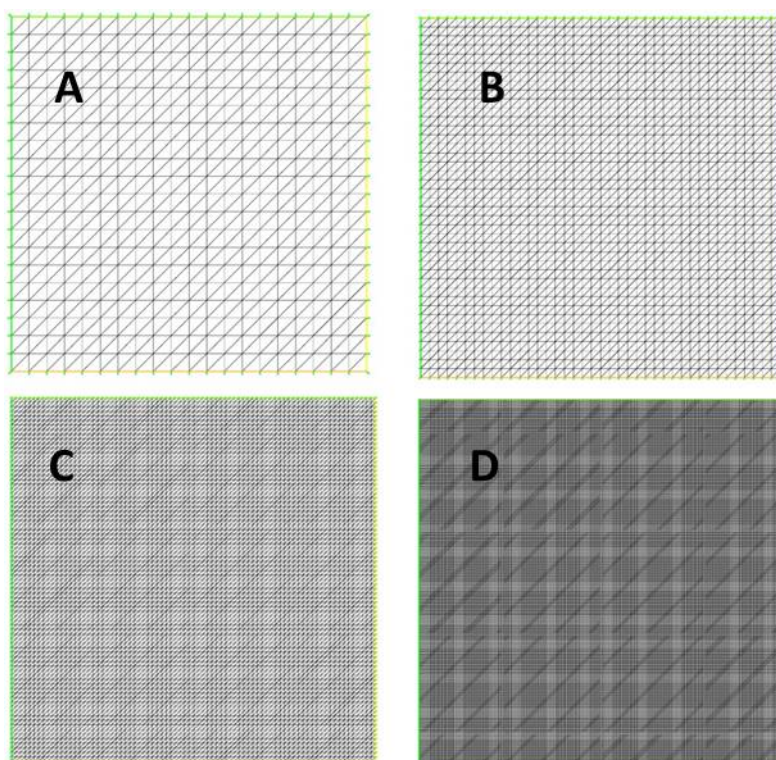


Figura 4.2: Rappresentazione griglie non strutturate usate per i calcoli 2D.

Nella figura ?? sono mostrati i *vectorplots* del vettore velocità. All'aumentare della risoluzione della griglia diventa evidente una grande zona di ri-circolazione e due più piccole negli spigoli inferiori, che non risultavano visibili nella griglia più rada. Da queste prime indagini, risulta quindi che la griglia gioca un ruolo importante nella soluzione.

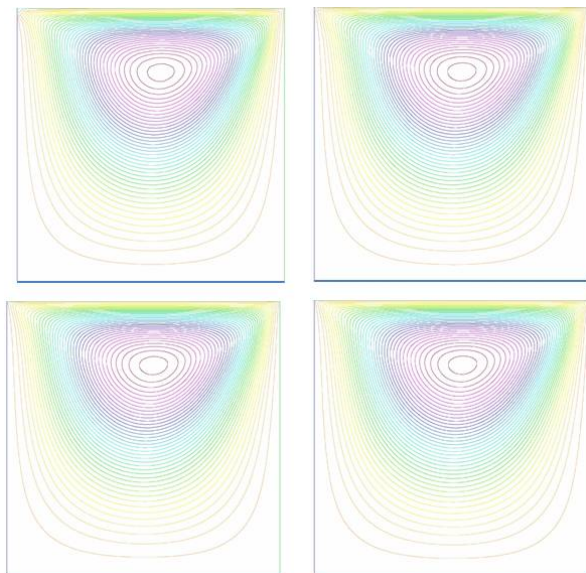


Figura 4.3: Linee di corrente per diverse griglie. Variazioni non apprezzabili.

4.3 Cenni ai Metodi Spettrali

I metodi spettrali permettono di risolvere problemi differenziali evolutivi con un grado di accuratezza maggiore rispetto per esempio agli elementi finiti. In particolare, la discretizzazione spaziale di un problema ellittico attraverso il metodo degli elementi finiti (FEM) vincola l'ordine di convergenza della soluzione numerica al grado dei polinomi usati. Invece la discretizzazione spaziale attraverso metodi spettrali (SM) o metodi agli elementi spettrali (SEM) garantisce una velocità di convergenza ottimale, limitata solo dalla regolarità della soluzione del problema. L'idea di base di questi metodi è quella di utilizzare polinomi globali sul dominio computazionale, invece di polinomi a tratti sui singoli elementi.

Ricordiamo innanzitutto i principali strumenti matematici necessari per un inquadramento generale dei metodi spettrali applicati alla risoluzione di problemi ellittici. Per risolvere problemi evolutivi è necessaria una discretizzazione dell'intervallo temporale e, ad ogni istante, si dovrà poi comunque risolvere un problema ellittico. Allora consideriamo un insieme Ω aperto in R^2 e x un punto di Ω . Lo spazio $L^2(\Omega)$ delle funzioni quadrato-sommabili è definito da:

$$L^2(\Omega) = \left[f : \Omega \rightarrow R^2 : \int_{\Omega} |f(x)|^2 d\Omega < \infty \right] \quad (4.9)$$

in modo tale che la norma ad esso associata sia definita come

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

Definiamo, inoltre, anche lo spazio delle funzioni superiormente limitate come:

$$L^\infty(\Omega) = \left(f : \Omega \rightarrow R \text{ limitate a meno di insiemi di misura nulla} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

dove, in questo caso la norma associata è descritta da:

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{\Omega} |f(x)| \quad (4.12)$$

Infine, definiamo lo spazio come

$$H^1(\Omega) = \left(f \in L^2(\Omega) \quad \nabla f \in L^2(\Omega) \right) \quad (4.13)$$

in quanto sarà di fondamentale importanza nel seguito della trattazione, poiché vedremo che sarà lo spazio ideale in cui impostare i problemi differenziali di nostro interesse. In questo caso la sua norma è definita come

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

Consideriamo ora un generico problema ellittico 2D, per esempio di diffusione-reazione con condizioni al contorno miste, per esempio:

$$\begin{cases} Lu := -\operatorname{div}(\mu \nabla u) + \sigma u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = h & \text{su } \Gamma_N \end{cases} \quad (4.15)$$

dove il dominio è $\Omega \subset \mathbf{R}^2$, con frontiera $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. È bene ricordare che con \mathbf{n} intendiamo il versore normale uscente dal dominio. La formulazione debole del problema 4.15 è:

$$\text{Trovare } u \in V : a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V \quad (4.16)$$

dove V è lo spazio di Hilbert $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, definito come

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

Secondo questo formalismo, possiamo dunque definire le forme variazionali deboli come:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla v + \int_{\Omega} \sigma uv = \int_{\Omega} f v + \int_{\Omega_N} h v$$

Naturalmente questa formulazione è valida solo nel caso in cui $\Gamma_D = \emptyset$ mentre, nel caso non omogeneo, sarà necessario provvedere a un rilevamento del dato Dirichlet. Per tutti i dettagli rimandiamo a [123].

4.3.1 Metodi SM e SEM

Siamo ora in grado di osservare il meccanismo su cui si basa il funzionamento vero e proprio dei metodi spettrali. Introduciamo, per ogni numero intero $N \in \mathbf{N}$, lo spazio \mathbf{Q}_N dei polinomi a coefficienti reali, di grado minore o uguale a N rispetto a ciascuna delle variabili. In particolare, nel caso bidimensionale avremo:

$$\mathbf{Q}_N(\Omega) = \left\{ v(x) = \sum_{k,m=0}^N a_{k,m} x_1^k x_2^m \in \mathbf{R} \right\}$$

Nel caso del metodo di Galerkin spettrale SM, lo spazio V della formulazione variazionale viene approssimato con uno spazio a dimensione finita $V_N \subset \mathbf{Q}_N$. Dato che V è un sottospazio di $H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$, V_N viene scelto come l'insieme dei polinomi di \mathbf{Q}_N che si annullano sulla parte di frontiera Γ_D , caratterizzata da una condizione di tipo Dirichlet. Dunque, analogamente a quanto definito nella precedente sezione,

$$V_N = \left\{ v_N \in \mathbf{Q}_N : v_N|_{\Gamma_D} = 0 \right\}$$

L'approssimazione SM del problema 4.15 risulta quindi essere:

$$\text{Trovare } u_N \in V_N : a(u_N, v_N) = F(v_N), \quad \forall v_N \in V_N \quad (4.17)$$

Consideriamo adesso un dominio Ω costituito dall'unione di quadrilateri Ω_k , ciascuno dei quali riconducibile al quadrato di riferimento $\hat{\Omega} = [-1; 1]^2$ mediante una trasformazione invertibile $\phi_k : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_k$

La formulazione SM, però, non può essere usata in quei casi in cui il problema richiede che la soluzione si annulli solo su una porzione di lato. Infatti, in questi casi, un polinomio che rispettasse tale caratteristica sarebbe necessariamente nullo su tutto il lato.

Poiché nei problemi di cui ci occuperemo in questa tesi, questa possibilità è realistica, introduciamo anche i metodi agli elementi spettrali (SEM) che essendo più maneggevoli permettono di risolvere questo problema. In questo caso, l'ambiente discreto che approssima lo spazio infinito dimensionale V è dato da:

$$V_N^C = \left\{ v_N \in C^0(\bar{\Omega}) : v_N|_{\Omega_k} \circ \phi_k \in \mathbf{Q}_N(\hat{\Omega}) \right\}$$

Si può pertanto osservare che, una volta scelto questo ambiente, l'approssimazione SEM del problema 4.15 diventa:

$$\text{Trovare } u_N \in V_N^C : a_C(u_N, v_N) = F_C(v_N), \quad \forall v_N \in V_N^C \quad (4.18)$$

dove i coefficienti sono dati da

$$a_C(u_N, v_N) = \sum_k a_{\Omega_k}(u_N, v_N), \quad F_C(v_N) = \sum_k F_{\Omega_k}(v_N),$$

dove sia $a_{\Omega_k}(\cdot, \cdot)$ e $F_{\Omega_k}(\cdot, \cdot)$ sono restrizioni di $a(\cdot, \cdot)$ e $F(\cdot, \cdot)$ al sottodominio Ω_k .

Di fatto possiamo constatare come il metodo agli elementi spettrali assomigli molto, almeno nell'idea, a quello più classico agli elementi finiti. In questo caso il vantaggio, come già discusso in precedenza, riguarda la possibilità di usare dei polinomi di grado più elevato, che consentano una maggiore accuratezza nel calcolo della soluzione, oltre a un più alto ordine di convergenza. I metodi agli elementi spettrali basati sui polinomi di Legendre sono quelli che sono stati usati in questa tesi.

4.3.2 Polinomi di Legendre

La formulazione debole dei problemi variazionali dipende fortemente dalla teoria riguardante la discretizzazione numerica degli integrali che compaiono nella formulazione. Tali integrazioni numeriche vengono effettuate con metodi altamente efficienti, i quali consentono di ottenere formule di quadratura con grado di esattezza massimale. Il modo naturale di raggiungere questo obiettivo è quello di effettuare una scelta ben ponderata dei nodi di integrazione, in modo da soddisfare alcuni principi che qui descriveremo. Poiché una delle strade che conduce a ottenere formule di quadratura con grado di precisione massimale è quella dei polinomi di Legendre, e poiché in questa tesi sono stati usati proprio questi polinomi, qui riporteremo una breve descrizione sulle caratteristiche di questi polinomi.

Consideriamo l'intervallo monodimensionale ristretto $(-1; 1)$ e definiamo il prodotto scalare in $L^2(-1; 1)$ come:

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx \quad (4.19)$$

Introduciamo ora i polinomi di Legendre per la costruzione delle formule di integrazione come:

$$L_k(x), \quad \text{per } k = 0, 1, 2, \dots$$

definiti come le autofunzioni del problema di Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} L_k(x) \right) + k(k+1)L_k(x) = 0$$

Se $L_k(x)$ è normalizzato in modo tale che $L_k(1) = 1$, allora si può definire

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{2k-2j}{k} x^{k-2j} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

dove $[k/2]$ è la parte intera di $k/2$. In alternativa alla precedente formulazione, è anche possibile scrivere una relazione ricorsiva, in modo che risulti:

$$\begin{cases} L_0(x) = 1 \\ L_1(x) = x \\ L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}xL_k(x) - \frac{k}{k+1}L_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.20)$$

Tra i vari polinomi intercorre una relazione di ortogonalità, ovvero sia

$$(L_k, L_m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq k \\ (k + \frac{1}{2})^{-1} & \text{se } m = k \end{cases} \quad (4.21)$$

Grazie a questa proprietà, i polinomi di Legendre sono linearmente indipendenti e formano una base per lo spazio $L^2(-1, 1)$. A questo punto risulta immediato definire lo sviluppo in *serie di Legendre* di una qualsiasi funzione $f \in L^2(-1, 1)$ una funzione del tipo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}_k L_k(x), \quad (4.22)$$

Ora partendo dal seguente risultato:

$$\begin{aligned} (f, L_k) &= \int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}_i L_i(x) \right) L_k(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^1 L_i(x) L_k(x) dx \right) \hat{f}_i \\ &= \hat{f}_k \|L_k\|_{L^2(-1,1)}^2 \end{aligned}$$

è possibile scrivere l'espressione dei *coefficienti di Legendre*:

$$\hat{f}_k = \frac{(f, L_k)}{\|L_k\|_{L^2(-1,1)}^2} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) L_k(x) dx, \quad (4.23)$$

Conoscendo tali coefficienti risulta quindi immediato rappresentare una qualsiasi funzione di $L^2(-1; 1)$ secondo l'opportuna serie di Legendre. Si può considerare anche la troncata N-esima della serie di Legendre di f , cioè

$$f_N(x) = \sum_{k=0}^N \hat{f}_k L_k(x) \quad (4.24)$$

che continua comunque a conservare le stesse caratteristiche di convergenza. Sono proprio queste serie troncate ad essere utilizzate.

4.3.3 Formule di quadratura

Sia N il numero di nodi di quadratura della formula che vogliamo prendere in considerazione. In realtà la nostra scelta verterà su formule di quadratura interpolatorie del tipo

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^N \alpha_i f(x_i) \quad (4.25)$$

dunque formule di grado massimo ottenibile usando N nodi $\{x_i\}$. Introduciamo i nodi di quadratura di Gauss-Legendre-Lobatto (GLL), consistenti negli estremi dell'intervallo $(-1; 1)$ e negli zeri della derivata prima del polinomio di Legendre L_N . In questo modo i polinomi caratteristici di Lagrange corrispondenti a tali nodi

$$\psi_i \in \mathbf{Q}_N : \psi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad : \quad 0 \leq i, j \leq N$$

hanno forma analitica

$$\psi_i(x) = \frac{-1}{N(N-1)} \frac{(i-x^2)}{(x-x_i)L_N(x_i)} \frac{d}{dx} L_N(x), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.26)$$

Pertanto definiamo per ogni funzione $f \in C^0([-1, 1])$, il suo polinomio d'interpolazione $\Pi_N^{GLL} \in \mathbf{Q}_N$ nei nodi GLL:

$$\Pi_N^{GLL} f(x) = \sum_{i=0}^N f(x_i) \psi_i(x), \quad (4.27)$$

In base a come è stato definito, per questo polinomio vale la relazione:

$$\Pi_N^{GLL} f(x_i) = f(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.28)$$

dunque la descrizione interpolatoria e la funzione esatta devono necessariamente coincidere in corrispondenza dei nodi. Per quanto riguarda una qualche considerazione di convergenza, si può dimostrare che vale la seguente stima per l'errore di interpolazione, nel caso in cui $f \in H^s(-1; 1)$:

$$\|f - \Pi_N^{GLL} f\|_{H^k(-1,1)} \leq C_s \left(\frac{1}{N}\right)^{s-k} \|f^{(s)}\|_{L^2(-1,1)}, \quad s \geq 1, k \in \{0, 1\},$$

Un risultato di questo tipo è necessario soprattutto a stabilire che è stata data, dal punto di vista teorico, una buona impostazione, poiché garantisce

che, a patto di utilizzare un numero di nodi di quadratura sempre maggiore, l'approssimazione discreta della funzione in oggetto tende a quella esatta. Proseguendo con la trattazione, possiamo aggiungere che i pesi della formula di quadratura, definiti da

$$\alpha_i = \int_{-1}^1 \psi_i(x) dx$$

sono forniti dalla relazione

$$\alpha_i = \frac{2}{N(N+1)} \frac{1}{L_N^2(x_i)} \quad (4.29)$$

In definitiva, la formula di quadratura GLL assume pertanto la forma

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \simeq I_N^{GLL} f := \sum_{k=0}^N \alpha_k f(x_k) \quad (4.30)$$

Tale formula di quadratura ha grado di esattezza pari a $2N - 1$, ovvero integra esattamente tutti i polinomi di grado minore o uguale a $2N - 1$:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = I_N^{GLL} f, \quad \forall f \in \mathbf{Q}_{2N-1}$$

A questo punto procediamo ad una generalizzazione dei risultati sin qui ottenuti. Infatti, finora, tutte le analisi sono state svolte prendendo in considerazione solo l'intervallo monodimensionale di riferimento $(-1; 1)$. Invece, poiché intendiamo estendere le formule di quadratura a un generico intervallo $(a; b)$, nodi e pesi andranno definiti come:

$$t_k = \frac{b-a}{2} x_k + \frac{a+b}{2}, \quad \delta_k = \frac{b-a}{2} \alpha_k,$$

In questo modo è immediato definire la formula di quadratura GLL come:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{k=0}^N \delta_k f(t_k) \quad (4.31)$$

Poiché fino ad ora abbiamo trattato di funzioni esclusivamente monodimensionali mentre, in realtà, il nostro obiettivo sarà quello di trattare funzioni a supporto su un dominio bidimensionale. Quindi procediamo all'estensione al caso multidimensionale. Questa può essere ottenuta attraverso

un prodotto tensoriale della griglia dei nodi GLL fin qui utilizzati. In pratica, costruiamo una funzione del tipo

$$\psi_k(x) = \prod_{j=1}^d \psi_{k_j}(x_j) \quad (4.32)$$

dove d indica la dimensione dello spazio nel quale esiste la funzione. In questo modo, la formula di quadratura, nel caso del dominio bidimensionale di riferimento $\hat{\Omega} = (-1; 1)^2$, diventa

$$\int_{\hat{\Omega}} f(x_i, x_j) d\Omega \simeq \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^N f(x_i, x_j) \alpha_j \right) \alpha_i, \quad (4.33)$$

dove i punti $x_{ij} = (x_i; x_j)$, con $i, j = 0, \dots, N$, rappresentano i nodi GLL su $\hat{\Omega}$, ottenuti tramite prodotto cartesiano dei nodi GLL sull'intervallo monodimensionale. Infine, i pesi bidimensionali corrispondono al prodotto dei relativi pesi monodimensionali. Pertanto avremo

$$\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_j$$

Gli strumenti sin qui definiti sono sufficienti per l'inquadramento della versione con integrazione numerica del metodo spettrale. Tuttavia, nel caso in cui si voglia estendere anche il metodo agli elementi spettrali (che poi è il caso di nostro interesse), è necessario generalizzare le formule di integrazione numerica ai singoli elementi Ω_k , supponendo che essi siano domini quadrangolari di \mathbf{R}^2 . Infatti, in questo caso, esiste una trasformazione invertibile $\phi_k : \hat{\Omega} \rightarrow \Omega_k$. I nodi GLL sul generico elemento $\Omega - k$ vengono generati per mezzo della mappa

$$x_{ij}^{(k)} = \phi_k(x_{ij}), \quad i, j = 0, \dots, N,$$

mentre i pesi corrispondenti sono definiti da

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \alpha_{ij} |\det J_k| = \alpha_{ij} \frac{|\Omega_k|}{4}, \quad i, j = 0, \dots, N,$$

dove con J_k indichiamo lo Jacobiano della trasformazione ϕ_k e con $|\Omega_k|$ la misura di Ω_k . Grazie a queste ultime definizioni, siamo finalmente in grado di fornire la formula GLL su Ω_k :

$$\int_{\Omega_k} f(x) dx \simeq I_{N,k}^{GLL}(f) := \sum_{i,j=0}^N \alpha_{ij}^{(k)} f(x_{ij}^{(k)}) \quad (4.34)$$

4.4 Discretizzazione usando SEM

Un metodo capace di coniugare l'accuratezza dei metodi spettrali di Fourier e la flessibilità dei metodi basati su metodi locali di basso ordine (tipo le differenze finite) è il metodo agli elementi spettrali (SEM) introdotti da Patera [118]. Questo metodo consiste in una tecnica residuale di ordine alto simile ai metodi alle differenze finite (FEM), ma basati su polinomi ortogonali e quadrature numeriche molto accurate. Introduciamo ora alcuni aspetti legati alla discretizzazione delle equazioni incompressibili di Navier Stokes con il metodo degli elementi spettrali. Per ulteriori approfondimenti sulla discretizzazione spaziale e temporale si rimanda ai lavori di [57], [64], [99].

Nell'ipotesi di dover risolvere le equazioni di Navier Stokes incomprimibili in forma adimensionale, qui riportate, nel dominio Ω :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Il punto di partenza della discretizzazione secondo il metodo spettrale (SEM) così come per quello FEM, è scrivere le equazioni in forma debole, cioè la formulazione secondo cui le 4.35 sono moltiplicate per una funzione test del tipo $(\mathbf{v}, q) \in H_o^1(\Omega)$ e integrata sul dominio Ω . Qui $H_o^1(\Omega)$ indica lo spazio delle funzioni in $L^2(\Omega)$, cioè lo spazio delle funzioni quadrate integrabili, che tendono a svanire sui confini e le cui derivate prime comunque sono in $L^2(\Omega)$. Il termine viscoso è integrato per parti, in modo che la derivata più elevata sia del primo ordine. Allora le equazioni 4.35 consistono nel risolvere il seguente problema, cioè trovare $(\mathbf{u}, p) \in H_o^1$, tali che

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{Re} (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{u}), \quad (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in H_o^1 \quad (4.36)$$

dove il prodotto interno (\cdot, \cdot) è definito in modo tale che

$$(\mathbf{v}, \mathbf{u}) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \mathbf{u} dx \quad (4.37)$$

La discretizzazione si effettua con l'approssimazione di Galerkin, dove la prova e lo spazio di prova sono ristretti agli spazi delle velocità e pressioni $X^N \subset H_o^1$ e $Y^N \subset L^2$ rispettivamente seguendo la discretizzazione SEM cioè $P_N - P_{N-2}$ di Maday e Patea [153], dove la pressione è associata con polinomi di due gradi più bassi di quelli della velocità. Questo approccio *staggered* fu originariamente motivato per evitare modi spuri di pressione.

Tuttavia, discretizzazioni più recenti della tecnica SEM usando $P_N - P_N$ mostrano che questo problema non sussiste più [4]. Una delle differenze principali tra i metodi FEM e SEM sta nella scelta di X^N . Infatti, mentre per i metodi FEM si impiegano funzioni lineari, per i metodi SEM questo è tipicamente uno spazio di polinomi interpolanti di Lagrange di ordine N , $h_i^N(x)$, basato su matrici tensori di prodotti di punti di quadratura di Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) in un elemento locale, Ω^e , $e = 1, 2, \dots, E$, che soddisfa $h_i^N(\xi_j^N) = \delta_{i,j}$. Qui $\xi_j^N \in [-1, 1]$ indica uno degli $N + 1$ GLL punti di quadratura e $\delta_{i,j}$ è il simbolo di Kronecker. Per un singolo elemento in R^3 la rappresentazione di $\mathbf{u} \in X^N$ è:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^e(r, s, t))|_{\Omega} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \mathbf{u}_{i,j,k}^e h_i^N(r) h_j^N(s) h_k^N(t), \quad (4.38)$$

dove \mathbf{x}^e è la mappatura delle coordinate dall'elemento di riferimento $\hat{\Omega}$ all'elemento locale Ω^e e u_{ijk}^e è il coefficiente nodale di base. L'introduzione della rappresentazione approssimata, secondo il metodo SEM, di u cioè della 4.38 nell'equazione 4.36 e l'impiego della quadratura di Gauss per gli integrali, dà origine all'equazione semi-discretizzata

$$B \frac{d\mathbf{u}}{dt} = D^T \underline{p} - C(\mathbf{u})\mathbf{u} - \frac{1}{Re} K \mathbf{u}, \quad D\mathbf{u} = 0, \quad (4.39)$$

dove B and K sono, rispettivamente, le matrici di massa e di rigidità degli elementi spettrali, $C(\mathbf{u})$ denota l'operatore non lineare e D , D^T sono rispettivamente gli operatori discreti della divergenza e del gradiente. La discretizzazione nel tempo dell'equazione 4.39 è basata sulle tecniche di frazionamento ad elevato ordine, descritto in Maday [154]. In questo modo, per ridurre il costo computazionale, i termini non lineari convettivi possono essere trattati esplicitamente con una estrapolazione del secondo o terzo ordine (EXT2/3), mentre per assicurare la stabilità numerica, i termini viscosi sono trattati implicitamente con uno schema di differenziazione all'indietro (*backward*) del secondo o terzo ordine (BDF2/3). Ciò eventualmente conduce ad un sistema lineare simmetrico di Stokes per i coefficienti di base dei vettori \underline{u}^n e \underline{p}^n da risolversi ad ogni passo temporale n ,

$$H \underline{u}^n - D^T \underline{p}^n = B \underline{f}^n, \quad D \underline{u}^n = 0. \quad (4.40)$$

Qui, $H = (1/Re)K + (3/2\Delta t)B$ è l'equivalente discreto dell'operatore di Helmholtz $-(1/Re)\nabla^2 + (3/2\Delta t)$ (nel caso si sia usato EXT2/BDF2). Per quanto riguarda il termine destro dell'equazione, \underline{f}^n tiene conto sia dei casi in cui ci sono termini non lineari e sia di quelli in cui ci sono forzanti esterne nelle equazioni di Navier Stokes.

4.5 NEK5000- Breve Introduzione

La soluzione dell'equazione 4.40 applicata a problemi fluido-dinamici che coinvolgono un numero di punti griglia, e quindi di incognite, dell'ordine del milione da far girare su migliaia di processori, richiede una speciale attenzione. In questa tesi si è usato il codice agli elementi spettrali NEK5000, che utilizza un risolutore lineare, per le simulazioni Navier-Stokes. Il codice è stato sviluppato da Fisher [111] ed una dettagliata descrizione del *solver* lineare in esso implementato è disponibile in [82], [64]. In questa sede si illustrano solo le principali caratteristiche.

L'idea di fondo consiste nel disaccoppiare velocità e pressione attraverso l'operatore della tecnica del frazionamento (*operator splitting technique*) ed è descritta da [154] e [119]. Prima viene risolta una equazione di Helmholtz basata sul campo di pressione noto al passo precedente, quindi dando un campo approssimato di non divergenza della velocità libera, $\hat{\underline{u}}^n$,

$$H\hat{\underline{u}}^n = B\underline{f}^n + D^T \underline{p}^{n-1} \quad (4.41)$$

seguito da un passo per la correzione della pressione

$$E\delta\underline{p}^n = -D\hat{\underline{u}}^n \quad (4.42)$$

dove la $E := (2\Delta t/3)DB^{-1}D^T$ (assumendo BDF2) è il complemento di Stokes Schur e un operatore coerente di Poisson per la pressione (vedi [29] e [57]) introdotto per evitare di rallentare la convergenza associata all'algoritmo di Uzawa (vedi [83]). L'errore di frazionamento è dell'ordine di $O\Delta t^2$ (vedi [99]), non più grande dell'errore di discretizzazione temporale. Infine, le velocità e la pressione sono aggiornate in questo modo

$$\underline{u}^n = \hat{\underline{u}}^n + \frac{2\Delta t}{3}B^{-1}D^T\delta\underline{p}^n \quad (4.43)$$

$$\underline{p}^n = \underline{p}^{n-1} + \delta\underline{p}^n \quad (4.44)$$

Per grandi valori del numero di Reynolds e piccoli Δt , l'operatore di Helmholtz è simmetrico e fortemente diagonalmente dominante, così i problemi d di Helmholtz (equazione 4.41), dove d denota la dimensione dello spazio, sono ben condizionati e iterativamente risolti usando i gradienti coniugati con un preconditionatore di Jacobi. Al contrario, il problema di Poisson, equazione 4.42, è rigida, e l'operatore E è mal condizionato. La ragione per la rigidità è la velocità infinita dell'onda della pressione causata dall'incompressibilità, come già detto prima. Possiamo dire che il grosso dello sforzo

computazionale è speso qui. L'equazione 4.42 viene risolta attraverso i metodi *multigrid* agli elementi spettrali (SEMG), dove GMRES è accelerato da un preconditionatore basato su due solutori di Schwarz sovrapposti, tipicamente su livelli N e $N/2$ (vedi [82]) ed una soluzione su griglia rada. Il problema della griglia globale rada è riferito agli elementi lineari finiti sui vertici degli elementi e risolto sia usando il solutore diretto ed altamente parallelo chiamato XXT, oppure usando l'approccio iterativo AMG (*algebraic multigrid*), che è più intenso nella comunicazione ma diventa relativamente più efficiente per i problemi più grandi (vedi [64] e [82] rispettivamente). La scalabilità di questi solutori è un punto cruciale, un parametro chiave per una implementazione efficiente e massicciamente parallela, dato che questo passo introduce la comunicazione globale. I problemi locali (a livello di elemento) sono risolti usando il metodo di diagonalizzazione rapida (vedi [125]), che è basato sulla decomposizione dell'operatore locale come:

$$E_e = \hat{E}_y \otimes I + I \otimes \hat{E}_x = \hat{D}_y B^{-1} \hat{D}_y^T \otimes I + I \otimes \hat{D}_x B^{-1} \hat{D}_x^T \quad (4.45)$$

dove I è la matrice identità e usando per E la definizione prima data (eccetto per $2\Delta t/3$). Il simbolo $\hat{\cdot}$ denota gli operatori uni-dimensionali della matrice definita sull'elemento di riferimento, in particolare \hat{D}_y e \hat{D}_x denotano le matrici derivate rispetto a y e a x , rispettivamente; \otimes è il prodotto di Kronecker. Per semplicità trascuriamo le condizioni al contorno e le diverse griglie associate con la procedura di Schwarz. Se \hat{E}_x e \hat{E}_y sono diagonalizzabili con

$$\hat{E}_x = S_x \Gamma_x S_x^T, \quad \hat{E}_y = S_y \Gamma_y S_y^T, \quad (4.46)$$

dove S_x e S_y sono composti (colonne) dagli autovettori di \hat{E}_x e \hat{E}_y rispettivamente, e Γ_x e Γ_y sono matrici diagonali con i rispettivi autovalori, allora E^e può essere diagonalizzata come:

$$E_e = (S_y \otimes S_x)(\Gamma_y \otimes I + I \otimes \Gamma_x)(S_y^T \otimes S_x^T), \quad (4.47)$$

dando come inversa

$$E_e^{-1} = (S_y \otimes S_x)(\Gamma_y \otimes I + I \otimes \Gamma_x)^{-1}(S_y^T \otimes S_x^T), \quad (4.48)$$

che può essere facilmente calcolata poiché $(\Gamma_y \otimes I + I \otimes \Gamma_x)$ è diagonale.

\hat{E} la struttura del prodotto tensoriale dell'approssimazione 4.38, che dà luogo all'espressione sopra vista, cioè a 4.47, per gli operatori locali. Per valutare effettivamente questi operatori, l'approccio più semplice per una matrice di dimensione n , significherebbe un totale di operazioni di $\mathcal{O}(n^4)$ in

2D e una enorme quantità di memoria. Comunque, adoperando i prodotti matrice per matrice la stima può essere fatta in un ordine di grandezza minore e in un modo molto più efficiente per la memoria *cache*. In sostanza, esso sfrutta le seguenti relazioni (vedi per maggiori dettagli [99]): Supponendo che vogliamo applicare l'operatore $C = AB$ ad un campo bidimensionale, \underline{u} di dimensione $N \times M$, dove $\underline{u} = (u_{00}, u_{10}, \dots, u_{N0}, \dots, u_{NM})^T$. Allora, il solito prodotto matrice per vettore si scriverebbe

$$\underline{v} = C\underline{u} \quad (4.49)$$

dove $C = AB = (A \otimes I)(I \otimes B) = (AI \otimes IB) = (A \otimes B)$. Invece mettendo le espressioni di u_{ij} e v_{ij} in una matrice rettangolare U_{ij} e V_{ij} di dimensione $N \times M$ si può facilmente verificare che la seguente forma è equivalente all'equazione 4.50,

$$V = BUA^T \quad (4.50)$$

che consiste nella moltiplicazione di due matrici di complessità di ordine $\mathcal{O}(n^3)$, assumendo che $M \sim N = n$. Così, le fattorizzazioni dei prodotti tensoriali di questo tipo riducono il numero totale di operazioni da $\mathcal{O}(n^{2d})$ a $\mathcal{O}(n^{d+1})$ in d dimensioni e riduce l'utilizzo di memoria poiché non sono presenti esplicitamente grandi matrici. Ultimo ma non meno importante, esso consente l'uso di routines altamente ottimizzate per il prodotto matrice per matrice ($m \times n$) per risolvere il sistema finale di equazioni (vedi [57]). Per poter ulteriormente velocizzare la convergenza del problema di Poisson 4.42, il fatto che sia molto improbabile che il campo di pressione cambi improvvisamente su una serie di successivi passi temporali viene sfruttato. La soluzione corrente è proiettata su uno spazio di soluzioni precedenti (sull'ultima ~ 20 passi temporali), e usata come una ipotesi iniziale per la soluzione iterata dell'equazione 4.42, ulteriormente descritta in [58]. L'utilizzo di tutte queste metodologie insieme hanno portato a delle ottime proprietà di *scaling* su diverse architetture di macchine in parallelo. Qui però riportiamo solo lo *scaling* ottenuto sulla macchina del Cineca usata per le simulazioni fatte in questa tesi.

4.5.1 Scaling del codice NEK5000 su macchina Cineca

In questo paragrafo vengono fornite alcune informazioni sull'efficienza e sulle proprietà di *scaling* del codice agli elementi spettrali NEK5000. In particolare, in questa tesi, le simulazioni sono state eseguite utilizzando una macchina ad architettura fortemente parallela, e cioè un computer IBM Blue-Gene/Q denominato FERMI e dislocato presso il CINECA. La macchina è

costituita da 10 *racks*, ognuno dei quali è costituito da due *midplanes*. Su ogni *midplane* sono installati 16 *Note Cards*. Ogni *Note Card* è formata da 32 *Compute nodes* ed infine ogni *Compute node* è dotato 16 processori IBM PowerA2 che lavorano alla frequenza di 1.6 GHz e ognuno di essi è dotato di 16 GB di memoria RAM. Quindi ogni *midplane* è dotato di $16 \times 32 \times 16$ e di conseguenza ogni *rack* possiede il doppio di questi processori, e cioè 16384. Poiché la macchina è formata da 10 *racks*, sono disponibili più di 1.6×10^5 processori. Un test per valutare lo *scaling* della macchina è stato fatto considerando quale applicazione la scia che si genera dietro un corpo tozzo investito da uno strato limite di Blasius. La griglia utilizzata è formata da 3.1×10^5 elementi di ordine 6 in ogni direzione e questo porta ad un numero di punti di collocazione di 3.8×10^7 e questo a sua volta implica un numero globale di gradi di libertà approssimativamente di 1.52×10^8 . Il passo temporale è di 8.0×10^{-2} che implica un CFL di 0.51 mentre viene usato un schema del terzo ordine per avanzare nel tempo. La memoria necessaria per questa simulazione è stata stimata attraverso le indicazioni fornite nel manuale del codice NEK5000 ed è di circa 340Gb, divisa su tutti i processori usati nel calcolo parallelo. Per quanto riguarda i files di riavvio, la loro dimensione è pari a circa 1.0GB ciascuno. Un file contenente la soluzione e la griglia (almeno uno è necessario per la visualizzazione del campo di moto intero) ha una dimensione di circa 1.8 Gb.

Questo caso appena descritto è stato usato per collaudare lo *speedup* del codice sulla macchina FERMI. In particolare, sono state considerate solo 2000 iterazioni sebbene lo stato stazionario può essere raggiunto solo con un numero di 3.0×10^4 iterazioni. Abbiamo detto che ogni nodo ha 16 processori ma in questo test sono stati anche lanciati 32 processi su ogni nodo (2 per ogni processore), come suggerito da CINECA. I risultati del test sullo *scaling* sono riportati nella tabella 4.2. Qui viene fatto vedere come variano i tempi assoluti di calcolo al variare del numero di nodi e quindi dei processori per le 2000 iterazioni diminuisce. Il test è stato ripetuto anche nel caso in cui ad ogni processore venivano assegnati 2 processi.

La figura 4.4 mostra i diagrammi dei risultati del test sullo *scaling*. Lo *speedup* e l'efficienza sono stati stimati considerando la griglia più. Come si può vedere dalla figura 4.4 lo *speedup* è accettabile, per il caso in esame, sino a 16384 processori. Tuttavia, bisogna osservare che la partizione ottenuta considerando 16384 processori è estremamente raffinata. Infatti, in questo caso solo 19 HP elementi sono generalmente contenuti in ogni partizione, e qui l'ordine degli elementi è medio (ordine 6). Così per ordini di elementi più alti (ordine 9-12), normalmente usati nell'approccio agli elementi spettrali, è plausibile che il guadagno sia maggiore.

Nodi	Processi	cores	HP el. per	Tempo(s)	Speedup	Effic.
64	1	1024	300	5627	1000	100
128	1	2048	150	2923	1925	95
256	1	4096	75	1581	3559	89
512	1	8192	38	872	6453	81
1024	1	16384	19	513	10969	69
128	2	2048	75	1902	2959	148
256	2	4096	38	1086	5181	129
512	2	8192	19	581	9685	121

Tabella 4.2: Risultati del test dello *scaling* di nek5000 su macchina Fermi.

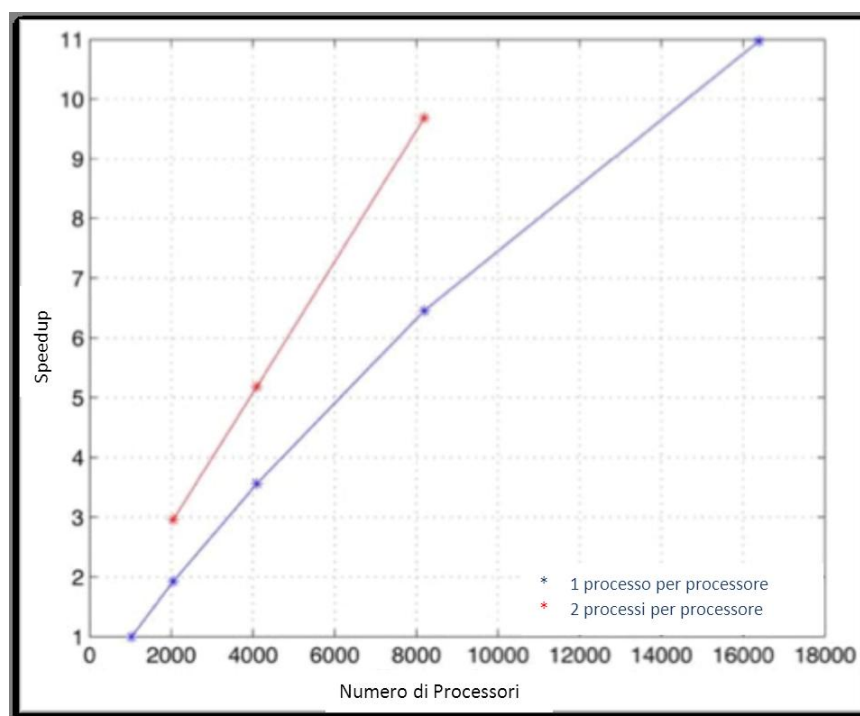


Figura 4.4: Test sullo *scaling* del codice nek5000 su macchina Fermi.

Capitolo 5

Cavità 2.5D

5.1 Premessa

Lo studio del moto nelle cavità aperte o chiuse che siano, è di notevole interesse in molti campi industriali come abbiamo ampiamente discusso nel capitolo 2. Il flusso su cavità è un esempio tipico di una configurazione geometrica caratterizzata da una regione finita di flusso separato e ovviamente, risulta fondamentale identificare le caratteristiche del flusso legate ai meccanismi di instabilità perché questi possono condurre a diversi fenomeni quali risonanza, vibrazioni strutturali o rumori. Abbiamo già ampiamente descritto lo stato dell'arte inerente i tipi di disturbi presenti in queste configurazioni geometriche, per cui nel presente capitolo descriveremo la geometria investigata, il tipo di calcoli eseguiti e naturalmente discuteremo i risultati ottenuti cercando di dedurre le leggi che regolano questi fenomeni. In particolare, questo studio si propone di individuare i valori del numero di Reynolds critico ed del numero d'onda *spanwise* per i quali per prima si verificano modi tridimensionali che si biforcano nella cavità aperta in condizioni di flusso incomprimibile, di determinare la cosiddetta regione *instability core* (cioè la regione più sensibile alla presenza di eventuali disturbi), attraverso l'analisi di sensitività strutturale basata sull'aggiunto, all'identificazione di quei parametri, quali per esempio la velocità e la lunghezza di scala di riferimento che permettono di individuare le condizioni critiche ed infine arrivare a valutare la sensitività delle instabilità presenti nel flusso a modifiche del flusso base piuttosto che ad una perturbazione del profilo di velocità del flusso che investe la cavità o della distribuzione di velocità alla parete.

5.2 Configurazione geometrica

La geometria che intendiamo studiare in questa sede è quella di una cavità avente sezione quadrata, cioè tale che larghezza (L) e profondità (D) siano uguali. La direzione normale al piano, invece, si estende fino all'infinito (da cui il nome 2.5D in analogia con ala infinita). La figura 5.1 mostra appunto la sezione della cavità ottenuta dall'intersezione di un piano perpendicolare alla direzione zeta (normale al foglio).

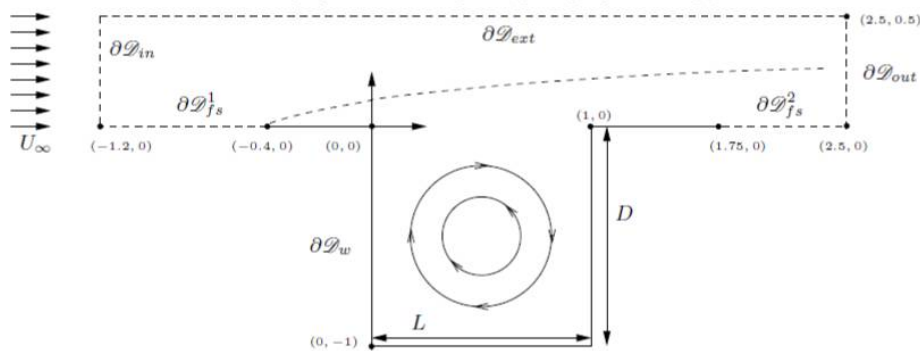


Figura 5.1: Geometria della cavità e sistema di riferimento.

Sullo spigolo sinistro è posta l'origine del sistema di riferimento adottato. L'asse x è diretto nel verso della propagazione del flusso base, mentre l'asse y è perpendicolare alla parete solida che conduce alla cavità. Le dimensioni della cavità sono tutte rapportate alla lunghezza che è stata presa unitaria cioè $L=D=1$, per cui la parete solida orizzontale che precede la cavità ha una lunghezza che è $0.4L$ mentre a valle si estende di $0.75L$. La cavità è lunga 1 e profonda 1. Questa geometria è stata investigata in tre diversi casi

1. Cavità aperta investita da flusso di Couette
2. Cavità aperta investita dallo strato limite di Blasius
3. Cavità chiusa con coperchio che si muove a velocità fissata

La figura 5.1 mostra anche lo strato limite che si sviluppa sulle pareti, lo *shear layer* che si genera sulla cavità stessa e la regione di ri-circolazione (vortice) che si genera all'interno della cavità.

5.3 Modello teorico per la cavità

La cavità prima descritta è stata studiata sia dal punto di vista della stabilità globale che della sensitività quando viene investita da una corrente uniforme. Nel seguito introdurremo il modello teorico adottato, le condizioni al contorno adottate, come è stata eseguita l'analisi di stabilità globale ed infine la sensitività strutturale. Nella sezione successiva verrà poi descritto nello specifico l'approccio numerico seguito per il calcolo del flusso base, per il calcolo degli autovalori e dell'aggiunto. Infine verranno presentati i risultati per i tre casi prima introdotti.

5.3.1 Flusso base e condizioni al contorno

Il flusso di base è descritto dalle equazioni incomprimibili non stazionarie di Navier Stokes che in forma adimensionale sono:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (5.1b)$$

dove \mathbf{u} è il vettore delle velocità con componenti $\mathbf{u} = (u, v, w)$ e P è la pressione ridotta. Le equazioni 5.1 sono state adimensionalizzate usando come lunghezza di riferimento la profondità D della cavità e come velocità di riferimento quella della corrente libera del flusso che investe la cavità. Quindi il numero di Reynolds è definito come

$$Re = \frac{U_\infty D}{\nu} \quad (5.2)$$

dove ν è la viscosità cinematica. Per avere un riscontro sui risultati ottenuti era necessario trovare un riferimento in letteratura. Quindi si è deciso di utilizzare quali condizioni al contorno le stesse utilizzate nei lavori di [41] e di [1]. Il sistema di equazioni differenziali 5.1 è chiuso dalle seguenti condizioni all'ingresso e all'uscita, indicati nella figura 5.1 come $\partial \mathcal{D}_{in}$ e $\partial \mathcal{D}_{out}$:

$$\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{e}_x, \quad x \in \partial \mathcal{D}_{in}; \quad P\mathbf{n} - Re^{-1} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad x \in \partial \mathcal{D}_{out}. \quad (5.3)$$

Mentre sul bordo superiore del dominio computazionale della corrente esterna, indicato in figura con $\partial \mathcal{D}_{est}$, sono state imposte condizioni di simmetria ovvero:

$$\partial_y u = 0 \quad e \quad v = 0 \quad y \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

Sulle pareti solide, indicate con $\partial\mathcal{D}_w$, è stata ovviamente imposta la condizione di *no – slip* ovvero

$$u = v = w = 0 \quad \forall (x, y) \in \partial\mathcal{D}_w \quad (5.5)$$

Per quanto riguarda invece le pareti vicine all'ingresso e all'uscita del flusso, indicate nella figura 5.1 con $\partial\mathcal{D}_{fs}^1$ e $\partial\mathcal{D}_{fs}^2$, è stata imposta la condizione di *free – sleep* con sforzo tangenziale nullo cioè:

$$\partial_y u = 0 \quad e \quad v = 0 \quad \forall (x, 0) \in \partial\mathcal{D}_{fs} = \partial\mathcal{D}_{fs}^1 \cup \partial\mathcal{D}_{fs}^2 \quad (5.6)$$

Nel paragrafo successivo viene illustrato come è stata eseguita l'analisi di stabilità globale.

5.3.2 Analisi di Stabilità Globale

L'analisi di stabilità lineare è stata condotta con l'approccio classico dei modi normali che consiste nello studio dell'evoluzione di piccole perturbazioni sovrapposte ad una soluzione stazionaria. Allora sia la velocità che la pressione sono state decomposte in un flusso base bidimensionale indicato con

$$\mathbf{Q}_b(x, y) = (\mathbf{u}_b, P_b)^T = (u_b, v_b, 0, P_b)^T \quad (5.7)$$

e in un disturbo tridimensionale di piccola ampiezza avente ordine ϵ e qui indicato con

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = (\mathbf{u}', P')^T = (u', v', w', P')^T \quad (5.8)$$

Ora se sostituiamo questa decomposizione nelle equazioni di Navier Stokes incomprimibili 5.1 e se trascuriamo i termini di ordine quadratico, si ottengono le equazioni linearizzate di Navier Stokes. Queste equazioni possono essere suddivise nel sistema delle equazioni del flusso base (versione stazionaria della 5.1) e nel sistema delle equazioni linearizzate instazionarie della perturbazione dato da:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbf{L}\{\mathbf{u}_b, \Re\}\mathbf{u}' = -\nabla P', \quad (5.10)$$

dove \mathbf{L} è l'operatore lineare di Navier Stokes definito come:

$$\mathbf{L}\{\mathbf{u}_b, Re\}\mathbf{u}' = \mathbf{u}_b \cdot \nabla \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}_b - \frac{1}{\Re} \nabla^2 \mathbf{u}'. \quad (5.11)$$

Poiché il flusso base è omogeneo in direzione dell'apertura delle cavità, ovvero lungo z , allora è possibile decomporre la generica perturbazione nei modi di Fourier di numero d'onda k lungo z . Quindi la perturbazione tridimensionale può essere espressa come:

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \{(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{P})(x, y) e^{[ikz + \gamma t]} + c.c.\}, \quad (5.12)$$

in questa espressione il termine $\gamma = \sigma + i\omega$ è un numero complesso e rappresenta la crescita del disturbo, mentre il termine *c.c.* non è altro che il complesso coniugato. Nell'espressione di γ , la parte reale σ rappresenta la crescita temporale della perturbazione, mentre la parte immaginaria ω né rappresenta la frequenza. Quando $\sigma > 0$, significa che il flusso base è instabile, mentre quando diventa negativa il flusso base è stabile. La sostituzione della perturbazione 5.12 nelle equazioni linearizzate della perturbazione 5.9 e 5.10 genera un problema agli autovalori del tipo

$$\mathcal{A}\hat{\mathbf{q}} + \gamma\mathcal{B}\hat{\mathbf{q}} = 0, \quad (5.13)$$

dove $\hat{\mathbf{q}} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{P})^T$ e \mathcal{A} è l'operatore complesso e linearizzato dell'evoluzione. Le espressioni degli operatori \mathcal{A} e \mathcal{B} sono le seguenti:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{C} - \mathcal{M} + \partial_x u_b & \partial_y u_b & 0 & \partial_x \\ \partial_x v_b & \mathcal{C} - \mathcal{M} + \partial_y v_b & 0 & \partial_y \\ 0 & 0 & \mathcal{C} - \mathcal{M} & ik \\ \partial_x & \partial_y & ik & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.15)$$

dove $\mathcal{M} = Re^{-1}(\partial_x^2 + \partial_y^2 - k^2)$ e $\mathcal{C} = u_b \partial_x + v_b \partial_y$ descrivono la diffusione viscosa della perturbazione e l'avvezione del flusso base. Le condizioni al contorno associate al problema agli autovalori 5.13 sono state ricavate da quelle usate per il flusso base e sono:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad \text{su } \partial\mathcal{D}_{in} \cup \partial\mathcal{D}_w \text{ (ingresso e parete),} \quad (5.16a)$$

$$\hat{P}\mathbf{n} - \Re^{-1}(\nabla\hat{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \text{su } \partial\mathcal{D}_{out} \text{ (uscita),} \quad (5.16b)$$

$$\partial_y \hat{u} = \hat{v} = \hat{w} = 0, \quad \text{su } \partial\mathcal{D}_{ext} \cup \partial\mathcal{D}_{fs} \text{ (esterna e di free-slip).} \quad (5.16c)$$

Da osservare inoltre che entrambe le coppie di numeri complessi $(\sigma + i\omega; \hat{\mathbf{q}})$ e $(\sigma - i\omega; \hat{\mathbf{q}}^*)$ sono soluzione del problema agli autovalori 5.13 con le condizioni al contorno 5.16 ed il flusso base reale \mathbf{Q}_b . Di conseguenza gli autovalori sono complessi coniugati e lo spettro   simmetrico nel piano (σ, ω) rispetto all'asse reale.

5.3.3 Sensitivit  Strutturale

L'analisi di sensitivit  qui condotta   stata fatta seguendo l'approccio gi  messo a punto nel lavoro di Pralits [80]. L'idea di fondo   il concetto del *wavemaker*, introdotto da Giannetti [54] per identificare dove   localizzato il cuore dell'instabilit  globale. Il *wavemaker*   la regione nel flusso dove variazioni nella struttura del problema generano la pi  grande deviazione di un specifico autovalore. Consideriamo allora il problema dell'autovalore perturbato

$$\gamma' \hat{\mathbf{u}}' + \mathbf{L}\{\mathbf{u}_b, \Re\} \hat{\mathbf{u}}' = -\nabla \hat{P}' + \delta \mathbf{H}(\hat{\mathbf{u}}', \hat{P}'), \quad (5.17)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}' = 0, \quad (5.18)$$

dove $\delta \mathbf{H}$   la perturbazione strutturale generalizzata. Si presume che esso sia una forza dinamica localizzata nello spazio e proporzionale alla perturbazione della velocit  locale attraverso una matrice di accoppiamento (3×3) , indicata qui con $\delta \mathbf{M}_0$, e una funzione delta cio :

$$\delta \mathbf{H}(\hat{\mathbf{u}}', \hat{P}') = \delta \mathbf{M}(x, y) \cdot \hat{\mathbf{u}}' = \delta(x - x_0, y - y_0) \delta \mathbf{M}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}'. \quad (5.19)$$

Trascurando i termini di ordine superiore, le variazioni dell'autovalore $\delta\gamma$ e della corrispondente autofunzione $(\delta\hat{\mathbf{u}}, \delta\hat{P})$ soddisfano la seguente espressione

$$\gamma \delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\{\mathbf{u}_b, \Re\} \delta \hat{\mathbf{u}} = -\nabla \delta \hat{P} + \delta \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} - \delta \gamma \hat{\mathbf{u}}, \quad (5.20)$$

$$\nabla \cdot \delta \hat{\mathbf{u}} = 0. \quad (5.21)$$

Usando poi l'identit  di Lagrange (vedi [54]), si possono determinare le equazioni che governano la struttura del campo aggiunto $\hat{\mathbf{g}}^+(x, y) = (\hat{\mathbf{f}}^+, \hat{m}^+)$

$$-\gamma \hat{\mathbf{f}}^+ + \mathbf{u}_b \cdot \nabla \hat{\mathbf{f}}^+ - \nabla \mathbf{u}_b \cdot \hat{\mathbf{f}}^+ + \frac{1}{\Re} \nabla^2 \hat{\mathbf{f}}^+ + \nabla \hat{m}^+ = 0, \quad (5.22)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{f}}^+ = 0. \quad (5.23)$$

Integrando sul dominio \mathcal{D} , tenendo conto delle condizioni al contorno ed introducendo il tensore di sensitività definito come

$$\mathbf{S}(x_0, y_0) = \frac{\hat{\mathbf{f}}^+(x_0, y_0) \hat{\mathbf{u}}(x_0, y_0)}{\int_{\mathcal{D}} \hat{\mathbf{f}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} dS}, \quad (5.24)$$

allora potremo esprimere la deriva dell'autovalore dovuto al *feedback* locale nel seguente modo

$$\delta\gamma(x_0, y_0) = \frac{\int_{\mathcal{D}} \hat{\mathbf{f}}^+ \cdot \delta \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{u}} dS}{\int_{\mathcal{D}} \hat{\mathbf{f}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} dS} = \frac{\hat{\mathbf{f}}^+ \cdot \delta \mathbf{M}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\int_{\mathcal{D}} \hat{\mathbf{f}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} dS} = \mathbf{S} : \delta \mathbf{M}_0 = \sum_{ij} S_{ij} \delta M_{0ij}. \quad (5.25)$$

Ora, allo scopo di costruire la mappa spaziale della sensitività si possono utilizzare differenti norme del tensore della sensitività \mathbf{S} . Qui è stata scelta la norma spettrale per studiare il caso peggiore.

5.4 Approccio Numerico

In questa sezione viene fornita una descrizione per il calcolo numerico del flusso base e per il calcolo sia dell'autovalore e sia del campo aggiunto.

5.4.1 Calcolo del flusso base

La cavità mostrata in figure 5.1 è stata investigata considerando che il flusso che la investe sia o uno strato limite di Blasius o un flusso di Couette. Inoltre è stato preso in esame anche il caso di *Lid Driven Cavity* cioè la cavità in cui il moto al suo interno è provocato dal moto del coperchio che si muove ad una determinata velocità.

I calcoli del flusso base per questi diversi casi sono stati condotti usando un metodo agli elementi finiti presentato nel capitolo 4, cioè FreeFem++ in cui è stata introdotta la formulazione variazionale delle equazioni Navier Stokes incomprimibili 5.1 usando, per la discretizzazione spaziale, l'approccio classico agli elementi $P2 - P1$ di Taylor-Hood. Il sistema non lineare di equazioni algebriche che ne viene fuori insieme alle condizioni al contorno

Mesh	$n_{d.o.f.}$	n_t
M1	998668	221045
M2	1416630	313791
M3	2601757	576887

Tabella 5.1: Dettagli sulle griglie non strutturate. $n_{d.o.f.}$ numero di nodi della griglia; n_t numero dei triangoli impiegati per la griglia

viene risolto con una procedura *Newton – Raphson* che consiste nei seguenti passi: assegnata una condizione di tentativo iniziale $\mathbf{w}_b^{(0)}$, il sistema lineare

$$\mathbf{NS}(\mathfrak{R}, \mathbf{W}_b^{(n)}) \cdot \mathbf{w}_b^{(n)} = -\mathbf{rhs}^{(n)} \quad (5.26)$$

viene risolto ad ogni iterazione usando il *MUMPS – Multifrontal Massively Parallel sparse direct Solver*, ([109], [48], [151], [108]) per l'inversione della matrice. A questo punto il flusso base viene aggiornato nel seguente modo:

$$\mathbf{W}_b^{(n+1)} = \mathbf{W}_b^{(n)} + \mathbf{w}_b^{(n)}. \quad (5.27)$$

La soluzione iniziale di tentativo viene scelta come soluzione delle equazioni di Stokes ed il processo continua finché la norma L^2 del residuo delle equazioni che reggono il moto non scendono sotto 10^{-12} .

Allo scopo di valutare l'efficienza sia della programmazione che della convergenza del *solver*, sono state considerate tre diverse griglie indicate con **M1**, **M2** e **M3**. Queste tre discretizzazioni sono state generate utilizzando il tool Bamg (*Bidimensional Anisotropic Mesh Generator*) che fa parte del pacchetto FreeFem++. La tabella 5.1 riporta nella prima colonna la griglia, nella seconda colonna il numero dei nodi ed infine nella terza colonna il numero dei triangoli impiegati.

La figura 5.2 mostra la griglia media utilizzata per il calcoli, mentre figura 5.3 mostra il dettaglio della rifinitura della griglia (zona in nero) in prossimità degli spigoli e nella regione dove è atteso essere lo *shear layer*. Come si osserva la griglia è molto ben rifinita perché ci si attende che in questa regione si verifichino strutture vorticosi di dimensioni geometriche (scale spaziali) molto diverse fra loro. In particolare, scale molto piccole in prossimità dello spigolo anteriore della cavità che poi crescono nella regione dello *shear layer* fino ad assumere valori massimi in corrispondenza del secondo spigolo.

Una verifica sulla accuratezza e bontà del flusso base è stata ottenuta effettuando un calcolo con un altro codice che è una variante del codice alle differenze finite del secondo ordine ampiamente descritto in [54]. In figura 5.4

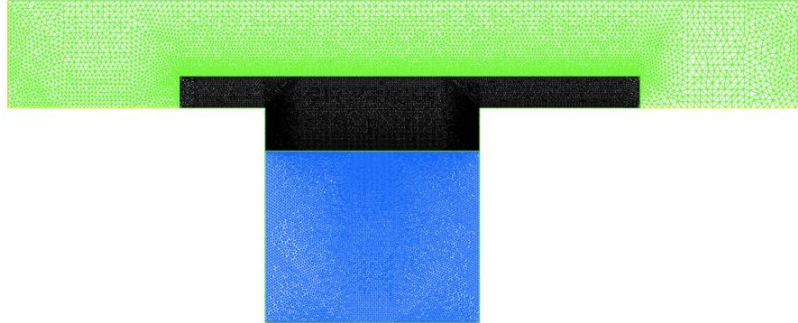


Figura 5.2: Discretizzazione della cavità aperta.

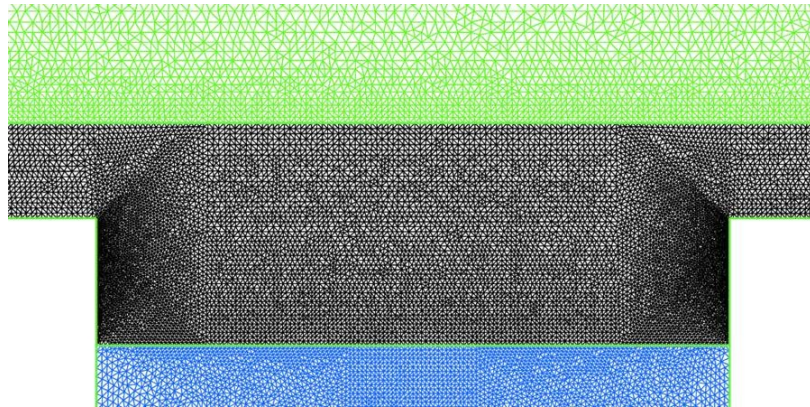


Figura 5.3: Dettaglio del livello di rifinitura della griglia negli spigoli e nella regione dello *shear layer*. Cavità aperta.

è riportato il tipico flusso base 2D stazionario sulla e nella cavità aperta calcolato per il numero di Reynolds di $Re=1370$. Nella figura, il *countourmap* fornisce il valore della velocità mentre le linee continue rappresentano le linee di corrente. Si può chiaramente vedere il vortice localizzato nella cavità, l'inizio dello strato limite sulla parete sinistra esterna alla cavità e il suo ispessimento sulla parete orizzontale destra (sempre esterna alla cavità).

5.4.2 Calcolo degli autovalori e dell'aggiunto

Una volta note le quantità del flusso base, presenti nel problema agli autovalori 5.13 come coefficienti, è possibile effettuare l'analisi di stabilità.

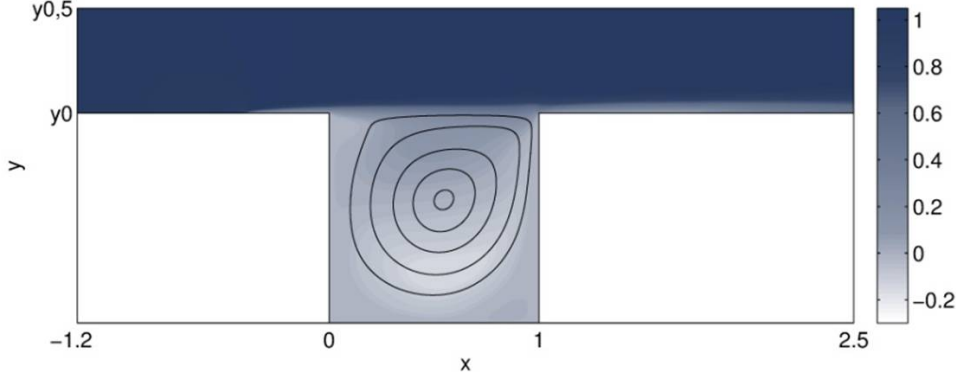


Figura 5.4: Contour map della velocità e linee di corrente a $Re=1370$.

In questo caso dopo aver effettuato la discretizzazione spaziale, le equazioni e le relative condizioni al contorno 5.16 possono essere riscritte nella seguente forma compatta:

$$[\mathbf{A}(\mathfrak{R}, \mathbf{W}_b) + \gamma \mathbf{B}] \cdot \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

dove \mathbf{w} è l'autovettore destro (o anche detto diretto). Poiché i metodi di decomposizione QR non sono molto indicati per risolvere problemi di larga scala come quelli che qui troviamo associati alla matrice \mathbf{A} , in questa tesi si è considerato un efficiente metodo iterativo *matrix-free* basato sull'algoritmo di Arnoldi [13]. Qui verrà usato il pacchetto aggiornato allo stato dell'arte di ARPACK [124], con ripartenza implicita per contenere le richieste di memoria disponibile. La soluzione del sistema lineare costruito dalle iterazioni di Arnoldi sul sottospazio di Krylov è ottenuta con lo stesso solver ([114], [115]) utilizzato per i calcoli del flusso base. I modi dell'aggiunto sono stati calcolati come gli autovettori sinistri del sistema discreto ottenuto dalla discretizzazione delle equazioni linearizzate. La funzione di sensitività è poi calcolata attraverso il prodotto del campo diretto e dell'aggiunto. Gli autovettori destro (diretto) e quello sinistro (aggiunto) sono normalizzati imponendo che

$$\max_{x,y \in \mathcal{D}} \{|\hat{u}(x,y)|\} = 1, \quad \int_{\mathcal{D}} \hat{\mathbf{f}}^+ \cdot \hat{\mathbf{u}} dS = 1. \quad (5.29)$$

I risultati qui ottenuti sono stati confrontati con i risultati di [41], da cui avevamo preso spunto per le condizioni al contorno. Infatti gli autori del

Mesh	σ	ω	$n_{d.o.f.}$	n_t	Source
M1	0.0007590	7.4931	998668	221045	Present
M2	0.0008344	7.4937	1416630	313791	Present
M3	0.0009122	7.4943	2601757	576887	Present
D1	0.0007401	7.4930	880495	194771	[41]
D2	0.0008961	7.4942	1888003	418330	[41]

Tabella 5.2: Confronto tra i risultati ottenuti in questa tesi e quelli di [41] per la stessa configurazione geometrica. La frequenza del modo ω ed il rateo di crescita del disturbo σ sono stati calcolati per il primo modo instabile per $Re=4140$.

lavoro [41] hanno investigato la stabilità di un flusso Newtoniano nella stessa configurazione geometrica qui investigata.

Nel loro lavoro riportano che la prima instabilità si verifica al numero di Reynolds $Re=4140$. La tabella 5.2 mostra il confronto tra i risultati ottenuti in questa tesi e quelli di Sipp, per quel Reynolds, al variare della griglia di discretizzazione. A questo scopo si è nuovamente incluso nella tabella 5.2 le caratteristiche delle griglie usate e mostrate nella tabella 5.1. Si osserva che già per la griglia **M1**, cioè la più rada, confrontabile alla **D1**, la frequenza coincide sino alla terza cifra decimale e la differenza sulla crescita della perturbazione è dell'ordine di 10^{-5} . All'aumentare del numero dei punti, σ ha la tendenza ad aumentare leggermente sia nei calcoli qui fatti che in quelli di [41]. Il confronto è più che soddisfacente.

Nei casi analizzati, sono stati calcolati 50 autovalori con una base di Krylov iniziale di dimensione 150. Il criterio di convergenza delle iterazioni di Arnoldi è basato su una tolleranza di 10^{-9} . Ad ogni modo per verificare in modo indipendente l'accuratezza dei risultati è stato calcolato a posteriori il massimo del residuo cioè $\max_i |(A_{ij} + \gamma B_{ij}) w_j|$. Ebbene il residuo è risultato sempre essere al di sotto di 10^{-9} per tutti i calcoli effettuati in questa tesi e addirittura per i casi meno stabili è sceso sotto 10^{-12} . Si segnala qui che la maggior parte dei calcoli presentati sono stati effettuati utilizzando la griglia **M2** mostrata nella figura 5.2.

5.5 Stabilità Lineare

5.5.1 Instabilità tridimensionali rispetto a quelle bidimensionali

Dato che la cavità è tipicamente una instabilità centrifuga, c'è da aspettarsi che la prima biforcazione sia caratterizzata dalla comparsa di modi stazionari tridimensionali con lunghezze d'onda relativamente corte in direzione dell'apertura della cavità come evidenziato dal lavoro [135]. Allo scopo di verificare questa supposizione, si sono investigati i valori del numero d'onda *spanwise* k , mostrati sull'asse x del grafico di figura 5.5, allo scopo di cercare i modi instabili al numero di Reynolds $Re=4140$ per il quale per prima un modo bidimensionale diventa instabile come visto anche in [41]. La figura 5.5 mostra i risultati dell'analisi di stabilità lineare, in particolare, si vede come varia la parte reale dell'autovalore γ , cioè σ , al variare del numero d'onda k . Come si può osservare da questi risultati, per il numero di Reynolds in oggetto, ci sono ben 8 rami instabili ed il modo più instabile ha il numero d'onda $k=22$ ed è un disturbo stazionario ($\omega=0$) come si può facilmente rilevare dalla figura 5.6.

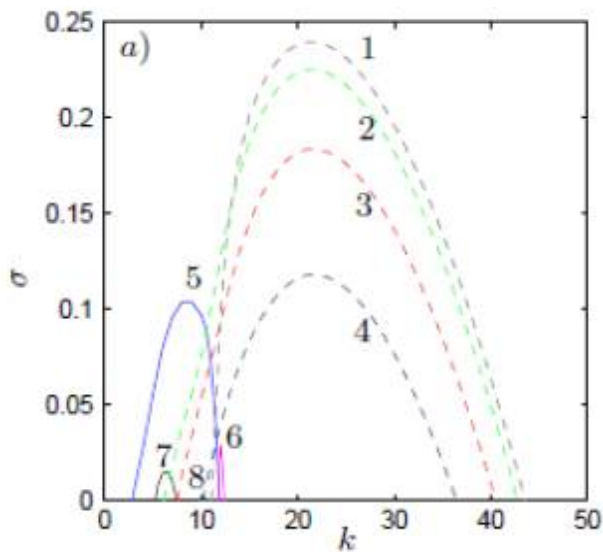


Figura 5.5: Stabilità lineare sulla cavità aperta a $Re=4140$. Parte reale dell'autovalore γ in funzione del numero d'onda k

Questa ultima mostra la parte immaginaria dell'autovalore γ cioè la fre-

quenza ω in funzione del numero d'onda k . Si può quindi dire che il flusso su una cavità aperta è caratterizzato da una prima biforcazione ad una configurazione tridimensionale.

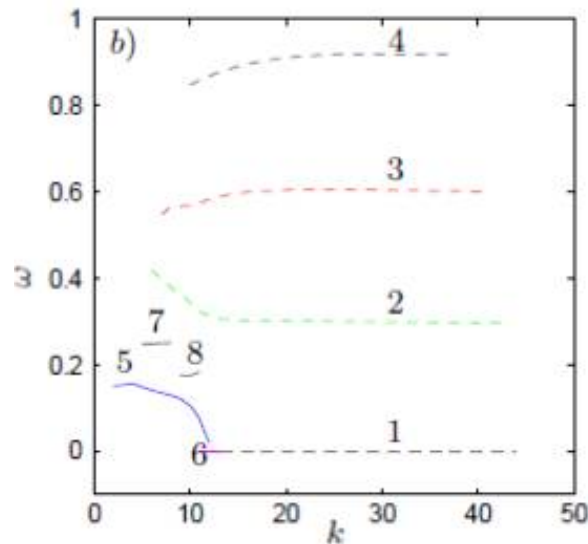


Figura 5.6: Stabilità lineare sulla cavità aperta a $Re=4140$. Parte immaginaria dell'autovalore γ in funzione del numero d'onda k

A questo punto è stato calcolato lo spettro completo degli autovalori per $k=22$. Il risultato è mostrato in figura 5.7. Come si vede ci sono 7 modi instabili (4 rami), piazzati simmetricamente rispetto all'asse reale. Come si può osservare il modo più instabile è, come già detto, quello stazionario, mentre gli altri rami sembrano armoniche del modo globale 2.

Per dimostrare il nascere di questa biforcazione da bidimensionale a tridimensionale occorre determinare il numero di Reynolds critico a cui l'instabilità prima insorge. Come si osserva dalla figura 5.8 la prima instabilità si verifica per il numero di Reynolds critico di $Re \approx 1370$, in figura rappresentata dalla linea continua, ed il primo modo a diventare instabile è associato al numero d'onda $k \approx 13.4$. Siccome la prima instabilità si verifica ad un numero di Reynolds critico inferiore a quelle delle instabilità bidimensionale, dobbiamo concluderne che questo è un modo stazionario tridimensionale. Infatti, tutti i modi mostrati in figura 5.8 hanno frequenza zero e quindi ci troviamo in presenza di una biforcazione a forchetta di un flusso stazionario modulato in direzione dell'apertura z .

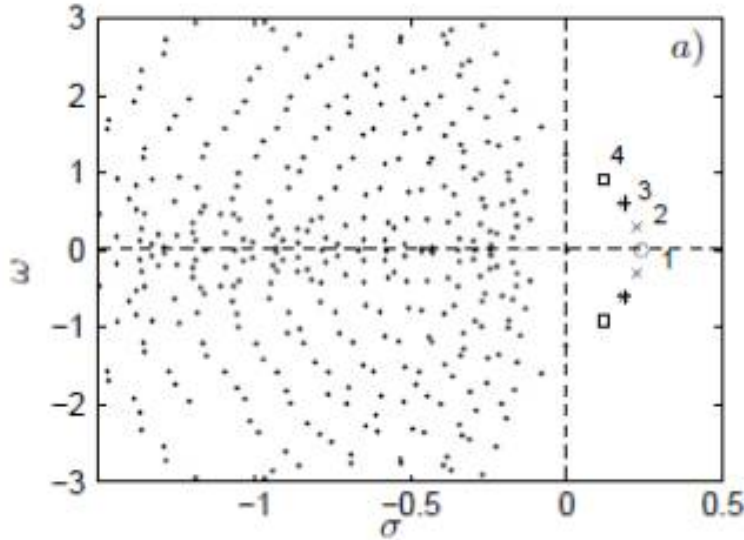


Figura 5.7: Spettro degli autovalori a $Re=4140$ e $k=22$. I numeri riportati in figura si riferiscono a quelli usati in 5.6.

Nella figura 5.9 viene rappresentato il modulo sia dell'autofunzione diretta che dell'aggiunto corrispondenti ai modi, indicati in figura 5.7, da 2, 3 e 4.

Le perturbazioni della velocità sono molto pronunciate nella regione circolare interna alla cavità, con una coda nella regione dello *shear layer* proprio sopra la parete a valle. I modi aggiunti, che indicano la regione del flusso più ricettiva ad una forzante nelle equazioni della quantità di moto, hanno una struttura simile, tranne per la regione sottile vicina allo spigolo a monte della cavità, dove l'instabilità è più efficacemente innescata. I modi instabili sono spazialmente localizzati nella stessa regione. Il flusso secondario generato dalla instabilità principale può essere descritto come un rotolo (vortice?) piatto che si trova nella cavità quadrata. La dinamica associata con le altre armoniche è una oscillazione periodica ancora concentrata nella regione interna alla cavità.

5.5.2 Sensitività strutturale della prima biforcazione

Uno degli obiettivi del presente lavoro è lo studio delle caratteristiche della prima biforcazione. A questo scopo osserviamo la struttura spaziale

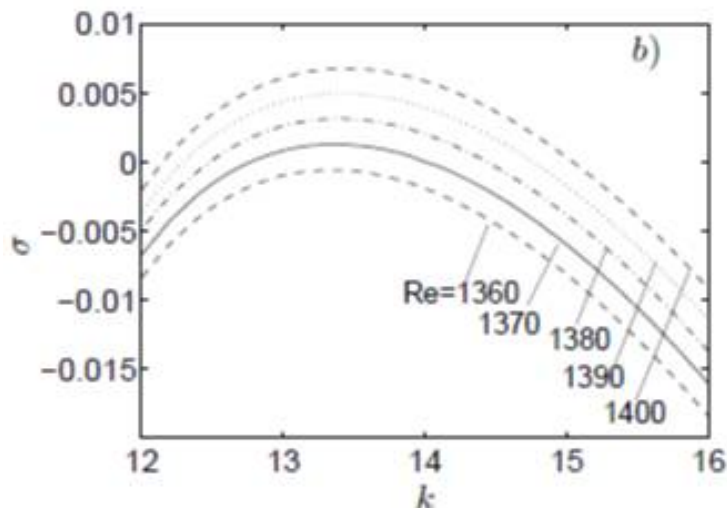


Figura 5.8: Valore del rateo di crescita dei disturbi più instabili in funzione del numero d'onda k per diversi valori di Reynolds. Per tutti questi modi la frequenza è zero. Il primo modo instabile del flusso su una cavità aperta è un modo tridimensionale stazionario

della fluttuazione de modo meno stabile a $Re = 1370$, $k = 13.4$. Come per i modi a numero di Reynolds più elevati, il modo è localizzato lungo le linee di corrente esterne della regione di ri-circolazione nella cavità, come mostrato in figura 5.10. Il livello di fluttuazione è più elevato nella componente *streamwise*, mentre nella componente trasversale e quella nella direzione dell'apertura sono circa il 61% e 88% rispettivamente delle fluttuazioni totali. L'aggiunto del modo critico è mostrato nelle figure 5.10(d-e-f). La sua struttura spaziale rassomiglia molto a quella del modo diretto, con una forte localizzazione lungo le linee di corrente circolari nella cavità.

Come già notato sopra, il modo diretto presenta una seconda regione di ampiezza notevole vicino lo spigolo a valle della cavità e nello *shear layer* proprio a valle di esso, mentre l'ampiezza del modo aggiunto non è trascurabile vicino allo spigolo a monte (primo spigolo della cavità). La sensitività strutturale del modo è mostrata in figura 5.11.

Questo indica le regioni nel flusso dove una *feedback forcing* proporzionale alla velocità locale di perturbazione provoca la massima alterazione dell'autovalore, in altre parole il *wavemaker* dell'instabilità. La sensitività, prodotto del modo diretto per quello aggiunto, è maggiore nell'interno della

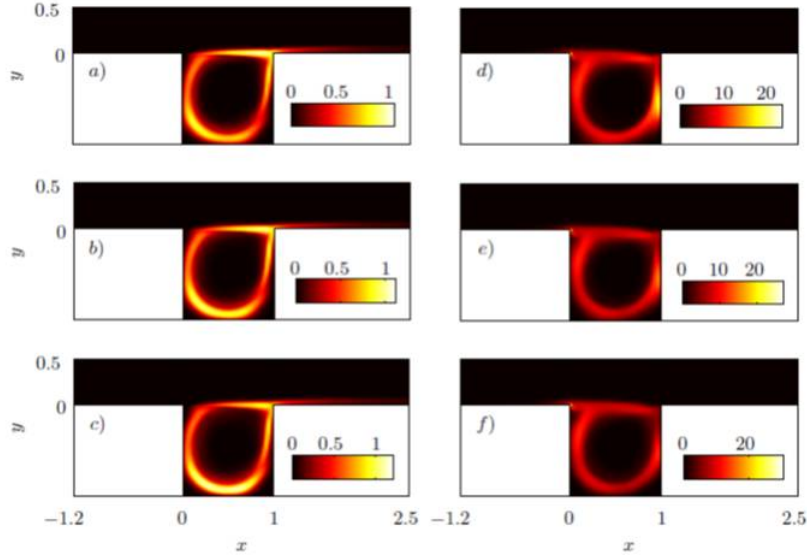


Figura 5.9: *Contour plots* del valore assoluto delle autofunzioni dirette e aggiunte dei modi 2, 3 e 4 come mostrato in figura 5.7 per $Re = 4140$ e $k = 22$. a) e d): diretto e aggiunto del modo 2 ($\omega \approx 0.3$); b) e e) modo 3 ($\omega \approx 0.6$); c) e f) modo 4 ($\omega \approx 0.9$).

cavità, senza significativi contributi dalle regioni di forte *shear* sopra esso. È interessante notare che il *wavemaker* è simile a quello calcolato per la cavità quadrata mossa dal coperchio, come si può apprezzare dal lavoro [137].

Per capire ulteriormente il meccanismo legato all'apparire della prima instabilità in questa configurazione geometrica, nelle figura 5.12 vengono mostrate le componenti del tensore di sensitività, viste nell'equazione 5.24, nella regione interna della cavità. La componente S_{ij} indica la sensitività ad una forzante nella direzione i proporzionale alla componente j del modo di instabilità. I risultati mostrano che la componente diagonale è la più grande, con la forzante chiaramente localizzata lungo le linee di corrente dove sia il disturbo della velocità che la sua ricettività (data dal modo aggiunto) sono i più grandi. Notevoli sono anche le componenti $\hat{v}^+ \hat{u}$ e $\hat{w}^+ \hat{u}$ che raggiungono grandi ampiezze lungo la parete verticale che limita la cavità a valle e vicino allo spigolo a valle. Questo indica sensitività alla forzante *streamwise* e *spanwise* in questa regione.

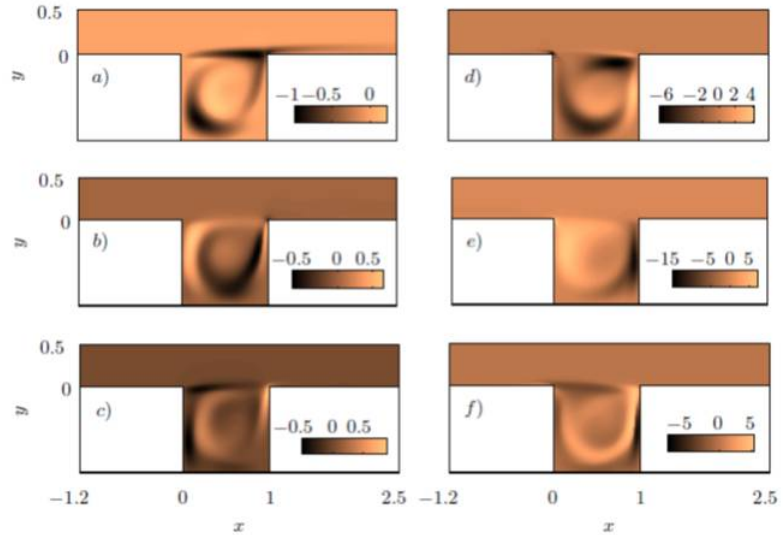


Figura 5.10: *Contour plots* della componente del modo diretto ed aggiunto in direzione *streamwise* [a)diretto; d)aggiunto], normale alla parete [b)diretto; e)aggiunto] e in direzione dell'apertura [c)diretto; f)aggiunto] calcolati vicino al numero di Reynolds critico a $Re = 1370$, $k = 13.4$.

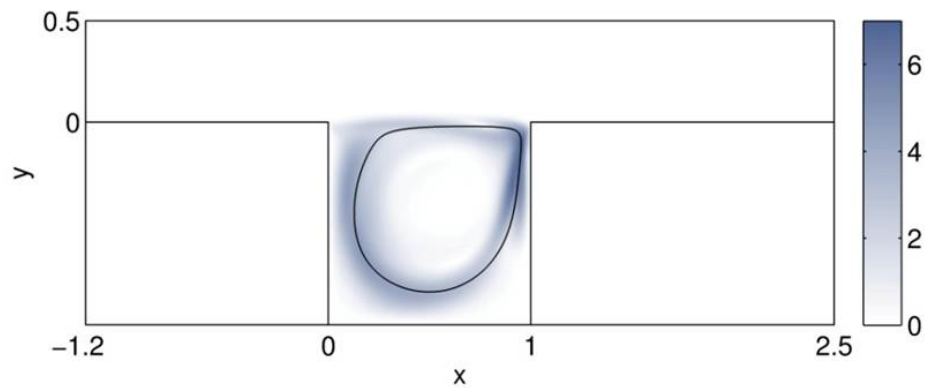


Figura 5.11: Sensività strutturale, il cuore dell'instabilità, alle condizioni neutri, $Re = 1370$, $k = 13.4$, per il flusso su una cavità aperta quadrata. La figura mostra anche la linea di corrente dove l'analisi asintotica predice il massimo della crescita non viscosa.

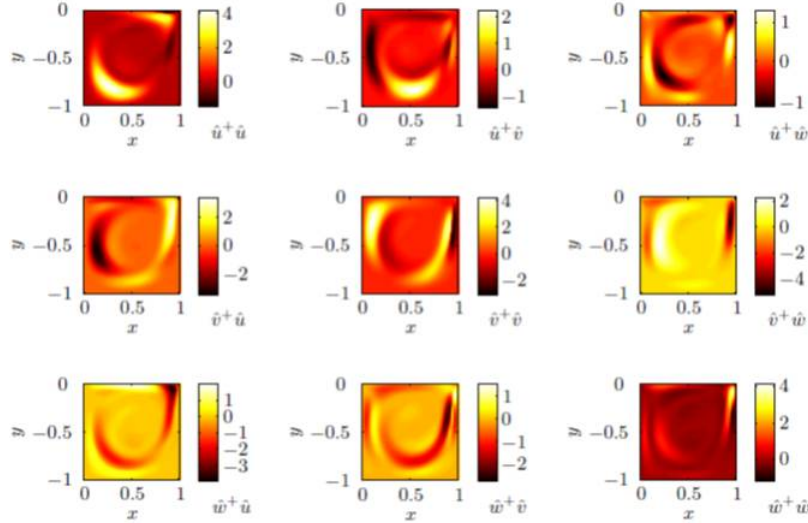


Figura 5.12: *Contour plot* del valore assoluto delle componenti della sensitività strutturale per $Re = 1370$, $k = 13.4$, $(L/D = 1)$.

5.6 Confronto tra diverse configurazioni di cavità

Due diverse configurazioni di cavità sono state investigate in questa tesi quella aperta e quella chiusa. La cavità aperta è stata a sua volta studiata sia quando investita da uno strato limite sufficientemente sottile, tipo quello di Blasius, e sia quando investita da un flusso illimitato quale quello di Couette. In questa sezione si proverà a fare un confronto tra i risultati ottenuti per queste diverse configurazioni di cavità e di flussi in termini di flusso base e di sensitività strutturale.

5.6.1 Cavità aperta rispetto alla *Lid – driven*

Allo scopo di confrontare i risultati ottenuti per le diverse configurazioni della cavità, si riportano nelle figure 5.13, 5.14 e 5.15 i profili di velocità u del flusso base in direzione *streamwise* in due sezioni della cavità. In particolare, le linee blu tratteggiate rappresentano il profilo di velocità nella sezione verticale, mentre le linee continue descrivono il profilo di velocità nella sezione orizzontale. La tabella 5.3 riporta i valori del numero critico di Reynolds e del numero d'onda k *spanwise* a cui sono stati fatti i diversi calcoli.

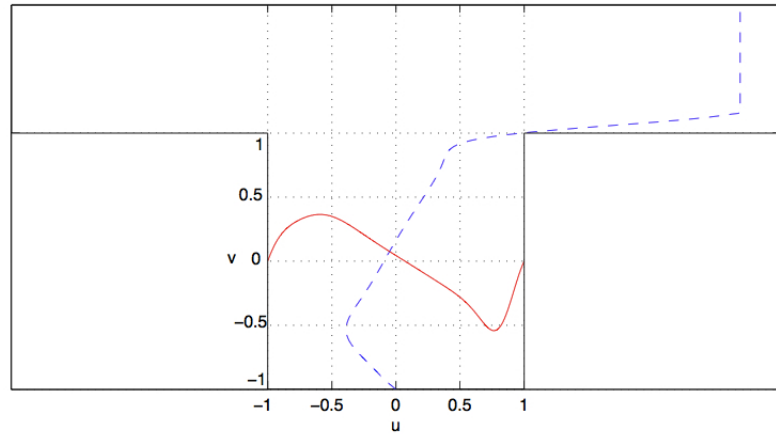


Figura 5.13: Cavità investita da strato limite di Blasius - Profilo di velocità u in direzione *streamwise* nella sezione verticale (linea tratteggiata) e nella sezione orizzontale (linea continua) calcolati a $Re = 1370$, $k = 13.4$, $(L/D) = 1$.

In tutte le configurazioni, si nota che la parte centrale del profilo di velocità ha andamento lineare a sottolineare un moto simile a quello di un corpo rigido, mentre avvicinandosi alle pareti si nota l'effetto della viscosità che porta il flusso a rallentare sino ad annullarsi sulle pareti per la condizione di *no-slip*. Il profilo di velocità verticale della figura 5.13 evidenzia uno strato limite sulla cavità, così come in figura 5.14 il profilo verticale evidenzia un flusso infinito sulla cavità.

Configurazione cavità	Numero di Reynolds critico	k
Cavità chiusa	790	≈ 15.4
Cavità aperta investita da Blasius	1370	$= 13.4$
Cavità aperta investita da Couette	20200	≈ 13

Tabella 5.3: Valori del numero di Reynolds critico e del numero d'onda k *spanwise* a cui sono stati effettuati i confronti.

Nella figure 5.16 e 5.17 vengono riportati i risultati dell'analisi di sensitività strutturale per la cavità aperta investita dallo strato limite di Blasius e

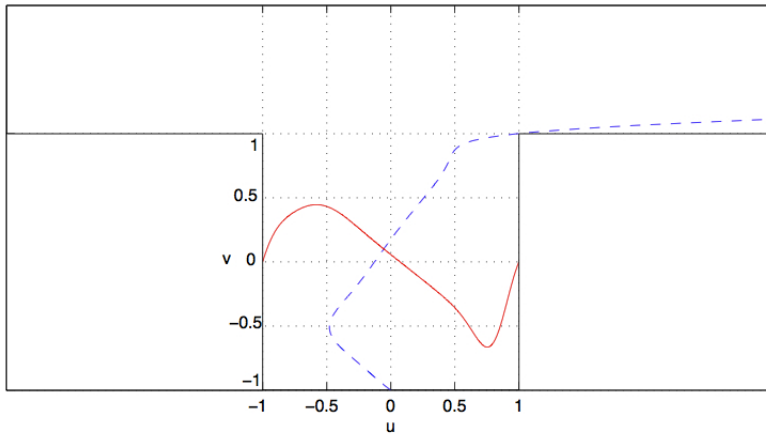


Figura 5.14: Cavit  investita da flusso di Coutte - Profilo di velocit  u in direzione *streamwise* nella sezione verticale (linea tratteggiata) e nella sezione orizzontale (linea continua) calcolati a $Re = 20200$, $k \approx 13.0$, $(L/D) = 1..$

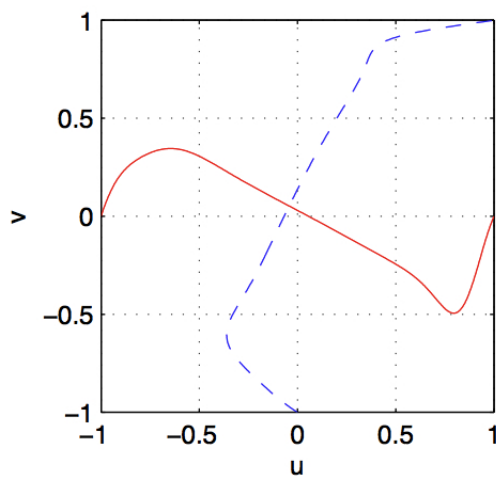


Figura 5.15: Cavit  *lid-driven* - Profilo di velocit  u in direzione *streamwise* nella sezione verticale (linea tratteggiata) e nella sezione orizzontale (linea continua) calcolati a $Re = 790$, $k \approx 15.4$, $(L/D) = 1$

dal flusso di Couette rispettivamente. La figura 5.18 mostra invece lo stesso risultato per la cavità chiusa. Tutte e tre i calcoli sono relativi ai numeri di Reynolds critici riportati nella tabella 5.3. L'analisi di sensitività strutturale mostra che il cuore dell'instabilità che genera la prima biforcazione 3D in una cavità quadrata aperta è chiaramente localizzata nello spazio ed è, in particolare, tutta contenuta all'interno della cavità stessa. Analogo risultato si può osservare dalla figura 5.18 dove è appunto riportata la sensitività strutturale della *lid - driven cavity*. Questo è in contrasto con la prima instabilità 2D (trovata da Sipp e Lebedev [41]) che nasce al numero di Reynolds $Re = 4140$ che, d'altra parte, è più simile ad una instabilità di tipo da scia [138] e [140] e principalmente accade nella regione a valle della cavità vicino al secondo spigolo. Dall'analisi dei risultati ottenuti, è chiaro che la regione esterna del flusso non sembra giocare un ruolo nella generazione del meccanismo che conduce all'instabilità 3D. È quindi ragionevole supporre che la configurazione cavità aperta sia esposta allo stesso tipo di instabilità di quelle che si manifestano nella *lid - driven cavity* e discusso nel lavoro [135] e [134].

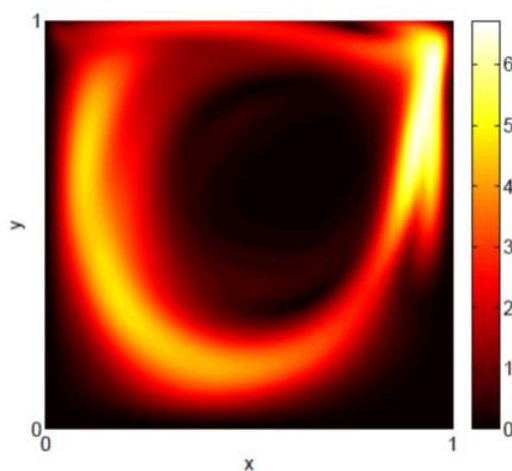


Figura 5.16: Cavità aperta investita da strato limite di Blasius - Analisi di sensitività strutturale calcolata a $Re = 1370$, $k = 13.4$, $(L/D) = 1$.

Nella presente configurazione lo *shear layer* che si distacca dallo spigolo sinistro infatti ha lo stesso ruolo di quello del coperchio nella formazione del moto vorticoso interno alla configurazione *lid - drive cavity*. La velocità del coperchio è uniforme mentre nel presente studio (cavità aperta) la velocità

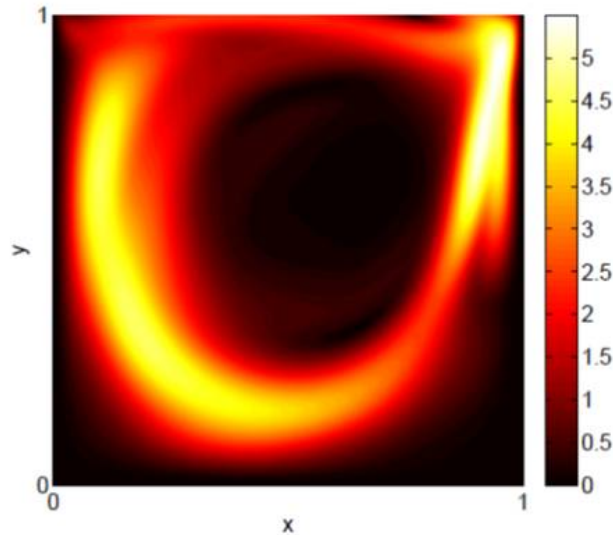


Figura 5.17: Cavità aperta investita da flusso di Couette - Analisi di sensitività strutturale calcolata a $Re = 20200$, $k \approx 13.0$, $(L/D) = 1$.

sulla linea che connette i due spigoli superiori della cavità non è costante. Infatti la velocità parte da zero sullo spigolo sinistro, aumenta lungo la linea e raggiunge un massimo per poi decrescere fino a ridiventare nulla nel secondo spigolo. La componente di velocità verticale è diversa da zero, ma il suo valore è piccolo se confrontato al valore della velocità orizzontale. Di conseguenza il campo di flusso, sebbene qualitativamente simile, presenta importanti differenze rispetto a quelle che si verificano nel problema della cavità chiusa (flusso generato dal trascinarsi del coperchio). Per la cavità chiusa il valore critico è stato calcolato indipendentemente da [143] e [135] (oppure anche [152] e [148]). L'analisi numerica di stabilità lineare tridimensionale di [135] copre un ampio intervallo di rapporti tra le dimensioni della sezione L/D , l'analisi qualitativa di diversi modi critici e spiega il meccanismo dell'instabilità centrifuga in termini di bilancio energetico ed il criterio di proposto da Sipp [42].

Questo è anche confermato dall'introduzione di un numero di Reynolds Re_{av} basato sulla profondità della cavità e sulla velocità media \tilde{U} lungo la linea che connette i due spigoli esterni della cavità. Usando questa velocità scalata, il numero di Reynolds critico per la prima instabilità diventa

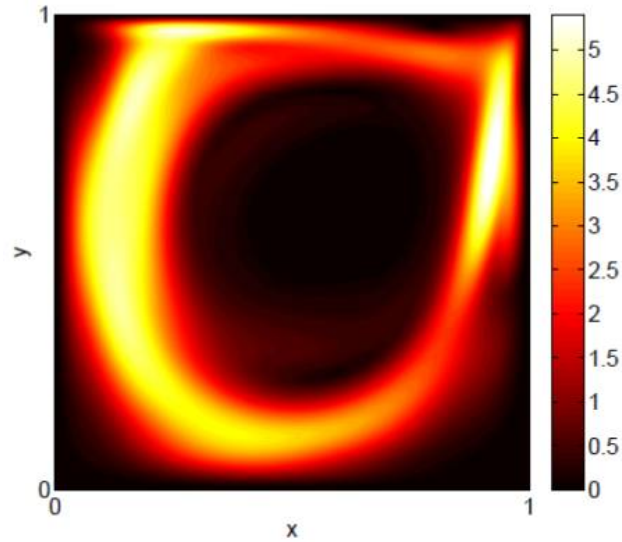


Figura 5.18: Cavità *lid – driven* - Analisi di sensitività strutturale calcolata a $Re = 790$, $k \approx 15.4$, $(L/D) = 1$

$$Re_{av} = \frac{\tilde{U}D}{\nu} \approx 490, \quad (5.30)$$

che è circa 38% più basso del valore trovato da [135]. Ora apparentemente i numeri di Reynolds critici sono molto diversi fra loro, come mostrato in tabella 5.3, però occorre anche dire che essi non sono adatti per un confronto tra le diverse configurazioni di cavità, e che a questo fine è meglio utilizzare il numero di Reynolds Re_{av} basato sulla velocità media \tilde{U} lungo la linea che connette i due spigoli esterni della cavità. Ebbene considerando questo valore del Reynolds si vede, come mostrato nella tabella 5.4, che ora i numeri di Reynolds sono paragonabili. D'altra parte anche i numeri d'onda k , per i quali si verifica la prima instabilità, sono confrontabili (vedi colonna 4 della tabella 5.4).

Tali dettagli e le similitudini qualitative tra entrambi i flussi ed i modi suggeriscono che lo stesso tipo di instabilità si stia verificando in entrambe le due configurazioni.

Configurazione cavità	Numero di Reynolds critico	$Re_{av} \check{k}$	
Cavità chiusa	790	790	≈ 15.4
Cavità aperta investita da Blasius	1370	490	$= 13.4$
Cavità aperta investita da Couette	20200	470	≈ 13

Tabella 5.4: Valori del Reynolds critico, del Re_{av} e del numero d'onda k *spanwise* a cui sono stati effettuati i confronti.

Capitolo 6

Cavit  3D

6.1 Il modello Teorico

6.1.1 Premessa

Nei capitoli 1 e 2 sono state ampiamente descritte le problematiche legate al flusso in una cavit  aperta o chiusa che sia. Nel capitolo 5   stato affrontata la modellistica legata alla cavit  quadrata con estensione infinita in direzione *spanwise* che abbiamo chiamato cavit  2.5D in analogia con il concetto di ala infinita a freccia. Ma nella realt , le cavit  che si riscontrano sugli aerei, sui treni, nella macchine o sulle navi sono tri-dimensionali, ovvero sono finte anche nella terza direzione, ed a queste che noi siamo interessati. Come gi  affermato nel capitolo 2, studi su cavit  3D, sia teorici che sperimentali, si possono contare su una sola mano e quasi tutti sono relativi o a simulazioni dirette e studi di stabilit  globale in regime comprimibile [20], [138] o a lavori sperimentali [141], [86]. Occorre anche precisare che le potenze di calcolo e la memoria necessaria ad affrontare questo tipo di simulazioni numeriche non rende semplice questo studio. Basti pensare che solo recentemente sono disponibili a costi contenuti, e in certi casi gratuiti, macchine parallele con numero di processori delle decine di migliaia che rendono possibile effettuare questi calcoli nel giro di un mese. Comunque questa tesi si concentra sullo studio di un flusso non comprimibile tri-dimensionale in una cavit  cubica allo scopo di capire i meccanismi che governano questo flusso con un occhio a quanto   stato fatto nel caso comprimibile, dato che come detto nel caso non comprimibile si trova ben poco.

6.1.2 Flusso nella cavità 3D

Allo scopo di effettuare lo studio delle caratteristiche della stabilità del flusso che si instaura in una cavità 3D è necessario utilizzare un approccio simile a quello utilizzato da Giannetti e Luchini [53] nel loro studio sul flusso intorno ad un cilindro infinito, oppure come quello utilizzato da Marquet, Sipp e Jacquin [105] per il controllo passivo della scia del cilindro attraverso una forza stazionaria agente sul flusso base. Lo studio dell'evoluzione del flusso può essere approcciato attraverso una simulazione diretta oppure è possibile usare una analisi numerica basata sui modi utilizzando una metodo basato sulla linearizzazione delle equazioni di Navier-Stokes. Questo approccio, date l'omogeneità delle condizioni al contorno, conduce ad un problema agli autovalori. Per l'analisi strutturale è necessario introdurre una qualsiasi modifica strutturale all'operatore linearizzato delle equazioni di Navier-Stokes, come può essere per esempio una perturbazione del flusso base. A questo punto, facendo variare la posizione spaziale della perturbazione e valutando la variazione subita dagli autovalori, in particolare l'autovalore con la parte reale più grande che è poi quello che più influenza la stabilità del sistema, si può identificare la regione del *wavemaker* cioè quella regione del campo dove la perturbazione causa la maggiore deviazione dell'autovalore principale. È necessario anche sottolineare che uno strumento fondamentale in questo approccio è rappresentato dall'operatore aggiunto delle equazioni di Navier Stokes. Infatti, l'analisi di sensitività strutturale utilizza sia le autofunzioni dell'operatore diretto delle equazioni di Navier Stokes che quelle dell'operatore aggiunto. Le prime permettono di descrivere le oscillazioni del flusso e le seconde permettono di localizzare nel campo la regione del *wavemaker*. Chomaz [26] afferma che questa regione può essere identificata come l'area di sovrapposizione degli autovettori dell'operatore diretto e di quello dell'aggiunto. Ciò è stato confermato anche dal lavoro di Giannetti e Luchini [53]. Nel caso di flussi tridimensionali, oltre ai meccanismi visti nel 2D e 2.5D, occorre considerare il meccanismo dell'instabilità legato all'intensità del flusso di ri-circolazione vicino alle pareti della cavità che porta all'instaurarsi di una instabilità di tipo centrifuga. Bres e Colonius [62] eseguirono una analisi di stabilità del flusso introducendo una perturbazione tridimensionale in un campo di moto bidimensionale e usarono il criterio del discriminante di Rayleigh per dimostrare l'esistenza di una condizione di instabilità, ovvero che il valore della velocità angolare deve diminuire in una regione esterna del flusso. A causa della presenza delle pareti a monte e a valle, che sono una parte intrinseca del dominio, la quantità di moto delle linee di corrente esterne decresce molto rapidamente e questo porta il flusso a

formare, in direzione *streamwise*, dei modelli cellulari che conducono ad una condizione di instabilità. Bres e Colonus trovarono anche che questo modo ha una lunghezza d'onda *spanwise* che scala con la profondità della cavità ed una frequenza più bassa rispetto a quelle dei modi di Rossiter. Faure [141] ha effettuato degli esperimenti sulla cavità con forma di parallelepipedo al variare del numero di Reynolds e della forma della cavità stessa. Egli ha trovato un buon accordo tra i suoi risultati sperimentali e i dati numerici prima citati. Recentemente, Zhang e Naguib [86] hanno condotto delle indagini sperimentali a basso numero di Mach durante le quali hanno studiato gli effetti delle pareti laterali e della larghezza della cavità sulle oscillazioni auto-sostenute. Gli effetti sono stati valutati confrontando i risultati con quelli ottenuti da esperimenti su una cavità assial simmetrica di larghezza finita. Sembra che le pareti laterali causino una forte amplificazione delle oscillazioni di pressione misurate sulla parete di fondo della cavità, ad una distanza delle pareti laterali pari ad una profondità. In questa tesi effettueremo delle simulazioni del flusso su una cavità di forma cubica (con qualche applicazione anche a qualche caso di forma parallelepipedica) in cui lunghezza, larghezza e profondità della cavità hanno tutte la stessa dimensione. Anche in questo caso l'obiettivo è condurre l'analisi di stabilità globale e l'analisi di sensitività strutturale utilizzando il codice nek5000 introdotto nel capitolo 4.

6.1.3 Modello Teorico

Il flusso sulla cavità 3D è comunque descritto dalle equazioni di Navier Stokes mostrate in 5.1a e 5.1b che possono essere scritte anche in forma compatta come:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \mathbf{F}(\mathbf{b}) \quad (6.1)$$

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, sulle pareti solide viene imposta la condizione di *no-slip* e di *no-penetration* così come fatto nel caso di cavità $2.5D$. Anche le condizioni di ingresso ed uscita del flusso rimangono dello stesso tipo, ma considereremo solo il caso in cui il flusso base che investe la cavità è quello avente come profilo di velocità quello dello strato limite di Blasius. Nelle ipotesi di piccole perturbazioni la generica soluzione delle equazioni di Navier-Stokes può essere scritta come:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (6.2)$$

$$p(x, y, z, t) = P(x, y, z) + p'(x, y, z, t) \quad (6.3)$$

dove \mathbf{u}' e p' rappresentano il campo delle perturbazioni. Sostituendo le 6.2 e 6.3 nelle equazioni Navier Stokes, trascurando i termini di ordine quadratico, sottraendo la soluzione del flusso base (già soluzione delle equazioni di Navier Stokes) si ottengono le equazioni linearizzate 3D della perturbazione. Eliminando per semplicità l'apice alle perturbazioni otteniamo il sistema di equazioni:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (6.4a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.4b)$$

Le condizioni iniziali e quelle al contorno che chiudono il problema sono:

$$\mathbf{u}(\xi, \mathbf{0}) = \mathbf{u}_0(\xi) \quad \forall \mathbf{t} = \mathbf{0}, \quad (6.5a)$$

$$\mathbf{u}(\xi, \mathbf{t}) = \mathbf{u}_w(\hat{\xi}, \mathbf{t}) \quad \forall \hat{\xi} \in \partial \mathcal{D}_w \quad \mathbf{e} \quad \forall \mathbf{t}, \quad (6.5b)$$

$$\mathbf{q}(\xi, \mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \infty \quad \mathbf{e} \quad \forall \mathbf{t}, \quad (6.5c)$$

dove ξ e $\hat{\xi}$ sono due vettori che rappresentano i punti interni al dominio di calcolo ed i punti lungo i bordi, rispettivamente. Il vettore \mathbf{u}_0 rappresenta i valori iniziali della velocità all'istante zero, mentre u_w è il vettore dei valori delle velocità di perturbazione sulla superficie della cavità $\partial \mathcal{D}_w$. Nella 6.5c con q si è indicata la generica perturbazione che per $\xi \rightarrow \infty$ tende a svanire. Le equazioni linearizzate 6.5 con l'introduzione dell'operatore linearizzato delle equazioni di Navier Stokes diventano:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Re}) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{0}, \quad (6.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.6b)$$

dove $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Re})$ è dato da:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Re}) = (\mathbf{U} \cdot \nabla) + (\cdot \nabla) \mathbf{U} - \frac{1}{\mathbf{Re}} \nabla^2 \quad (6.7)$$

6.1.4 Sensitività Strutturale

Nell'analisi di stabilità di un flusso è sempre utile disporre anche del calcolo dell'aggiunto in quanto esso serve per esempio a determinare la posizione della regione del *wavemaker*, ma anche per lo studio delle sensitività

strutturale o della ricettività del sistema. Prima di tutto occorre effettuare l'analisi di stabilità globale. Le perturbazioni dei modi globali possono essere scritte come:

$$\mathbf{u}(\xi, \mathbf{t}) = \hat{\mathbf{u}}(\xi) \mathbf{e}^{(\sigma, \mathbf{t})} \quad (6.8a)$$

$$p(\xi, \mathbf{t}) = \hat{p}(\xi) \mathbf{e}^{(\sigma, \mathbf{t})} \quad (6.8b)$$

dove σ è l'autovalore complesso associato con l'autofunzione complessa $\hat{q} = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$. Sostituendo le espressioni di $\hat{\mathbf{u}}$ e \hat{p} nelle equazioni 6.6 si ottiene il problema agli autovalori che qui si riporta.

$$\begin{cases} \sigma \hat{\mathbf{u}} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{p} = 0 \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \end{cases} \quad (6.9)$$

Per la soluzione sono ovviamente necessarie le seguenti condizioni al contorno

$$\hat{\mathbf{u}}(\xi, \mathbf{t}) = \mathbf{0} \quad \text{su} \quad \partial \mathcal{D}_{\mathbf{w}} \quad (6.10a)$$

$$\hat{q}(\xi, \mathbf{t}) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{quando} \quad \xi \rightarrow \infty \quad (6.10b)$$

Una soluzione non banale di questo problema è rappresentata da un set di modi globali diretti e, associato ad ogni modo, l'autovalore $\sigma = \lambda + i\omega$ fornisce informazioni sul rateo di crescita attraverso la sua parte reale λ , mentre la sua parte immaginaria ω dà informazioni circa la frequenza di oscillazione. Sappiamo che se la parte reale di σ è negativa il modo associato è stabile, mentre se è positiva il modo risulta instabile. Questo perché il modo avente una parte esponenziale con esponente positivo cresce finché gli effetti non lineari diventano preponderanti. Supponiamo ora di considerare l'autovalore più instabile ed indichiamo con σ' una perturbazione di questo autovalore ed effettuiamo la sensitività dell'autovalore più instabile ad un *feedback* localizzato ci permetterà di individuare la regione del flusso in cui i meccanismi di instabilità agiscono. Ora aver introdotto un disturbo nel campo di moto significa aver provocato una modifica sia nel flusso base che nei modi diretti soluzione del problema, cioè avremo che

$$\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U} + \mathbf{U}' \quad , \quad (6.11a)$$

$$P \rightarrow P + P' \quad , \quad (6.11b)$$

$$\sigma \rightarrow \sigma + \sigma' \quad , \quad (6.11c)$$

$$\hat{\mathbf{u}} \rightarrow \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}' \quad , \quad (6.11d)$$

$$\hat{p} \rightarrow \hat{p} + \hat{p}' \quad , \quad (6.11e)$$

dove le perturbazioni (grandezze con apici) sono termini del secondo ordine. Se sostituiamo le 6.11 nel problema dell'autovalore diretto 6.9 e trascuriamo i termini quadratici, si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{L}(\mathbf{U}, Re)\hat{\mathbf{u}}' + \nabla \hat{p} = -\sigma' \hat{\mathbf{u}}' - \mathcal{L}'(\mathbf{U}')\hat{\mathbf{u}}', \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}' = 0, \end{cases} \quad (6.12)$$

dove \mathcal{L} è l'operatore linearizzato di Navier Stokes mentre \mathcal{L}' è l'operatore perturbato di Navier Stokes che è definito come:

$$\mathcal{L}'(\mathbf{U}') = (\mathbf{U}' \cdot \nabla) \dots + (\dots \cdot \nabla) \mathbf{U}' \quad (6.13)$$

Ora per calcolare la perturbazione σ' dell'autovalore è necessario introdurre il problema dell'autovalore aggiunto, la cui generica soluzione, chiamata modo aggiunto globale, può essere espressa come

$$\mathbf{v}(\xi, t) = \hat{\mathbf{v}}(\xi) e^{(-\sigma t)} \quad (6.14a)$$

$$\mathbf{q}(\xi, t) = \hat{\mathbf{q}}(\xi) e^{(-\sigma t)} \quad (6.14b)$$

dove σ è lo stesso autovalore del corrispondente modo globale diretto. Il problema dell'autovalore aggiunto è ottenuto introducendo 6.14 nelle equazioni aggiunte di Navier Stokes cioè in:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{U}) \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla q = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \end{cases} \quad (6.15)$$

ottenendo:

$$\begin{cases} -\sigma \hat{\mathbf{v}} + \mathcal{L}^+(\mathbf{U}, Re)\hat{\mathbf{v}} + \nabla \hat{q} = 0, \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0, \end{cases} \quad (6.16)$$

Applicando le identità generalizzate di Lagrange al problema dell'autovalore diretto si ottiene la seguente equazione

$$\hat{\mathbf{v}}^* \cdot [\sigma \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{L}(\mathbf{U}, Re)\hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{p}] + \hat{q}^* \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} + \quad (6.17)$$

$$+ \hat{\mathbf{u}} \cdot [-\sigma \hat{\mathbf{v}}^* + \mathcal{L}^+(\mathbf{U}, Re)\hat{\mathbf{v}}^* + \nabla \hat{q}^*] + \hat{p} \nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}^* = \quad (6.18)$$

$$= \nabla \cdot \left[\mathbf{U}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}^*) + \frac{1}{Re} (\nabla \hat{\mathbf{v}}^*) \cdot \hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} (\nabla \hat{\mathbf{u}}) \cdot \hat{\mathbf{v}}^* + \hat{p} \hat{\mathbf{v}}^* + \hat{q}^* \hat{\mathbf{u}} \right] \quad (6.19)$$

Per calcolare il prodotto interno dell'operatore lineare, cioè $\mathcal{L}^2(\Omega)$, nell'equazione 6.17 si introducono le autofunzioni aggiunte come complesse coniugate secondo quanto previsto dal prodotto interno. L'integrazione sul dominio Ω permette di ricavare questa nuova equazione

$$\int_{\Omega} \{\hat{\mathbf{v}}^* \cdot [\sigma \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Re}) \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{p}}] + \hat{q}^* \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}\} = \quad (6.20)$$

$$\oint_{\partial\Omega} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\mathbf{U}(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}^*) + \frac{1}{Re} (\nabla \hat{\mathbf{v}}^*) \cdot \hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{Re} (\nabla \hat{\mathbf{u}}^*) \cdot \hat{\mathbf{v}} + \hat{p} \hat{\mathbf{v}}^* + \hat{q}^* \hat{\mathbf{u}} \right] \quad (6.21)$$

dove il termine destro è stato ottenuto applicando il teorema della divergenza. Poiché le condizioni al contorno sono omogenee sia per le autofunzioni dirette che per quelle aggiunte il membro destro è nullo e quindi l'equazione 6.20 diventa

$$\int_{\Omega} \{\hat{\mathbf{v}}^* \cdot [\sigma \hat{\mathbf{u}} + \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{Re}) \hat{\mathbf{u}} + \nabla \hat{\mathbf{p}}] + \hat{q}^* \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}\} = 0 \quad (6.22)$$

Sostituendo questo nuovo risultato nel problema dell'autovalore diretto perturbato 6.12 si ottiene:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^* \cdot [-\sigma' \hat{\mathbf{u}} - \mathcal{L}'(\mathbf{U}) \hat{\mathbf{u}}] = 0 \quad (6.23)$$

Invertendo questa equazione possiamo ricavare l'espressione del modulo di σ' che è data da

$$|\sigma'| = \frac{|\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \mathcal{L}'(\mathbf{U}) \hat{\mathbf{u}}|}{|\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \hat{\mathbf{u}}|} \quad (6.24)$$

Ora se la perturbazione è localizzata in un punto del campo del flusso, allora si può ricorrere alla funzione delta di Dirac δ cosicché l'operatore perturbato si potrà scrivere come

$$\mathcal{L}' = \delta(x - x_o, y - y_o, z - z_o) \mathbf{L} \quad (6.25)$$

dove x_o , y_o e z_o sono le coordinate del punto di perturbazione ed \mathbf{L} è il tensore la cui dimensione è legata al numero di elementi del campo del vettore velocità. Grazie alle proprietà della funzione delta di Dirac, il modulo della perturbazione 6.24 può essere scritto come:

$$|\sigma'| = \frac{|\hat{\mathbf{v}}^*(x, y, z) \mathbf{L} \hat{\mathbf{u}}(x, y, z)|}{|\int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \hat{\mathbf{u}}|} \quad (6.26)$$

e l'applicazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz conduce poi alla seguente relazione:

$$|\sigma'| \leq \|\mathbf{L}\| \frac{\|\hat{\mathbf{v}}^*(x, y, z)\| \|\hat{\mathbf{u}}(x, y, z)\|}{\left| \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} \right|} \quad (6.27)$$

che permette di definire la sensitività strutturale come

$$s(x, y, z) = \frac{\|\hat{\mathbf{v}}^*(x, y, z)\| \|\hat{\mathbf{u}}(x, y, z)\|}{\left| \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}}^* \cdot \hat{\mathbf{u}} \right|} \quad (6.28)$$

Ora dove $s(x, y, z)$ risulta massimo là il sistema sarà più sensibile alla perturbazione. Di conseguenza, in quei punti sarà localizzato la regione del *wavemaker*, cioè la regione dove il meccanismo di instabilità agisce. In particolare, la variazione dell'autovalore con la parte reale più grande, che può essere relativa alla sensitività del sistema rispetto alla modifica strutturale, è proporzionale al prodotto tra l'autovalore diretto ed indiretto del modo più instabile.

Seguendo l'approccio di Luchini e Bottaro [113], il parametro della sensitività strutturale può essere ottenuto considerando un problema generalizzato discreto sia del diretto che dell'aggiunto, ovvero

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{b}} = \sigma\mathbf{M}\hat{\mathbf{b}} \quad e \quad \mathbf{A}\hat{\mathbf{c}}^* = \sigma\hat{\mathbf{c}}^*\mathbf{M} \quad (6.29)$$

dove \mathbf{A} è la matrice discreta che descrive la dinamica del sistema, mentre \mathbf{M} è la matrice di massa discreta e fornisce informazioni su come si modifica l'autovalore σ se la matrice \mathbf{A} viene perturbata con una perturbazione infinitesima $\delta\mathbf{A}$. La differenziazione sia del problema dell'autovalore diretto che dell'aggiunto fornisce:

$$|\sigma'| = \frac{\hat{\mathbf{c}}^* \delta\mathbf{A}\hat{\mathbf{b}}}{\hat{\mathbf{c}}^* \mathbf{M}\hat{\mathbf{b}}} \quad (6.30)$$

e se $\delta\mathbf{A}$ è una perturbazione localizzata la precedente identità può essere scritta nella forma seguente:

$$|\sigma'| = \frac{\hat{c}_i^* \hat{b}_j}{\hat{\mathbf{c}}^* \mathbf{M}\hat{\mathbf{b}}} \delta A_{i,j} \quad (6.31)$$

La perturbazione $\delta A_{i,j}$ rappresenta l'effetto di una forza localizzata in un punto i che è atteso essere proporzionale alla velocità di perturbazione in un punto j , per esempio grazie ad un meccanismo di *feedback* dato dal tensore \mathbf{L} introdotto nella 6.25. In questo modo la precedente equazione può essere vista come la forma discreta della 6.26, e, in aggiunta stressare

che la sensitività strutturale è proporzionale al prodotto delle autofunzioni dirette e aggiunte, esso permette di evidenziare che con il parametro s è possibile studiare la perturbazione della struttura, cioè i coefficienti, del sistema dinamico, piuttosto che gli effetti della forzante esterna.

6.2 Risultati Preliminari Cavità 3D

La messa a punto della procedura per il lancio delle simulazioni numeriche sulla cavità 3D ha richiesto molto tempo data la complessità del problema 3D in oggetto. Una volta preparato l'*input* i calcoli della cavità 3D hanno richiesto alcuni mesi di cpu su più di 4000 processori. Si tenga presente che i gradi di libertà del sistema erano intorno a 145 milioni come vedremo a breve.

6.2.1 Metodo numerico, discretizzazione spaziale e temporale

Il metodo numerico utilizzato per questi calcoli è stato ampiamente discusso nel capitolo 4 ed è basato su metodi spettrali agli elementi finiti. Tali metodi sono implementati nel codice *open source* Nek5000 sviluppato da Fisher e collaboratori ed utilizzato in questa tesi. Questo codice è in grado di modellare flussi non comprimibili sia stazionari che non ed è in grado di tener conto di fenomeni di trasporto, di trasferimento del calore e di geometrie che variano nel tempo (geometrie deformabili e o elastiche). Il dominio spaziale in cui vengono risolte le equazioni di Navier Stokes, così come le equazioni di stabilità globale, è diviso in elementi esaedrici. La soluzione è approssimata dal codice Nek5000 con polinomi di ordine elevato (sesto ordine) che assicurano una elevata accuratezza nei calcoli ed al contempo presentano un costo computazionale contenuto. Inoltre i metodi spettrali agli elementi finiti hanno un rateo di convergenza della soluzione numerica che dipende solo dalla regolarità della soluzione esatta e dal grado dei polinomi interpolanti. Siccome la soluzione delle equazioni di Navier Stokes è regolare quando lo sono le condizioni al contorno, allora possiamo dire che il rateo h di convergenza dipende solo dal grado polinomiale. Nelle equazioni sono però anche presenti dei termini non lineari che richiedono l'uso di uno schema implicito di integrazione per il tempo. Allora per quanto riguarda la discretizzazione temporale in questi calcoli si è utilizzato uno schema BDF (*Backward Differentiation Formula*) di ordine k (con $k = 1, 2, 3$) per l'operatore generalizzato di Stokes, mentre per evitare la soluzione del sistema non lineare, il termine convettivo viene approssimato con una estrapolazione di

ordine k . In questo modo, lo schema è chiamato $BDFk/EXTk$, è esplicito e formalmente accurato all'ordine k nel tempo.

6.2.2 Dominio di calcolo, griglia e condizioni al contorno

Il calcolo sulla cavità 3D, la cui lunghezza, larghezza e profondità è pari ad uno, è stato eseguito considerando come dominio di calcolo quello mostrato nella figura 6.1, che mostra una vista in prospettiva. Come si vede il sistema di riferimento è situato sul primo spigolo della cavità, che è investita da un flusso, diretto come l'asse delle x , indicato dalla freccia blu. L'asse y è diretto lungo lo spigolo, mentre l'asse z è normale al piano xy ed è uscente dalla cavità.

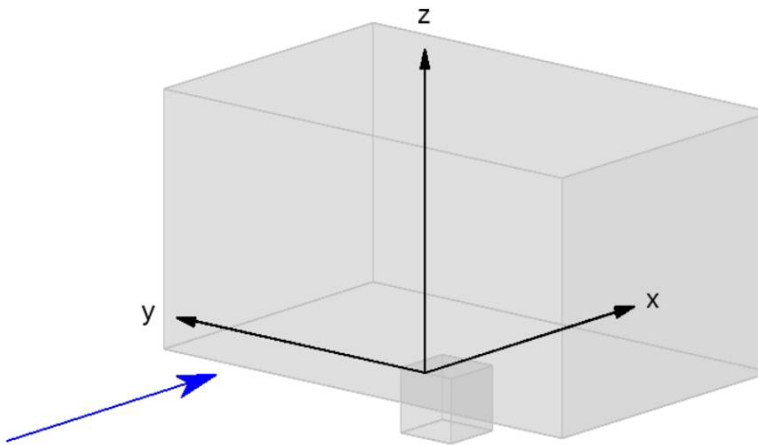


Figura 6.1: Vista 3D del dominio di calcolo per la cavità 3D

La distanza che precede la cavità, cioè la distanza fra l'*inflow boundary* e il primo spigolo della cavità è uno, mentre la distanza tra il secondo spigolo e l'*outflow boundary* è posto uguale a 4 come viene mostrato nelle figure 6.2, 6.3 e 6.4. Queste figure mostrano le proiezioni del dominio della cavità dall'alto cioè la sezione secondo il piano xy , la proiezione laterale secondo il piano yz ed infine la proiezione laterale secondo il piano xz , rispettivamente. Dalla figura 6.3 si vede che l'estensione laterale del dominio rispetto alla cavità, in entrambe le direzioni è 3.5. La figura 6.4 mostra invece l'altezza del dominio computazionale che è stato preso uguale 4.

La griglia utilizzata per questo calcolo è di tipo non strutturata costituita da elementi esaedrici. Per avere una distribuzione ottimale della griglia,

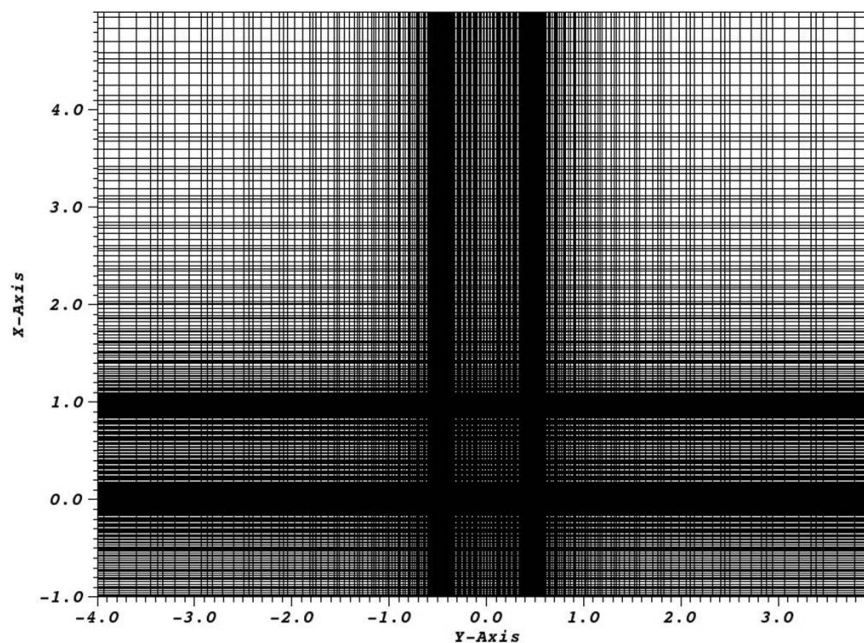


Figura 6.2: Proiezione del dominio computazionale secondo il piano xy .

specie nelle zone vicino agli spigoli (punti singolari del dominio), è stata utilizzata la trasformazione di Roberts che permette di infittire la griglia in prossimità degli spigoli aumentando così la risoluzione. Nel codice Nek5000 sono previste tre opzioni per la trasformazione di Roberts e qui è stata utilizzata la prima opzione, per maggiori dettagli si rimanda a [72]. Le figure 6.2, 6.3 e 6.4 mostrano anche dei dettagli circa la griglia, sebbene siano una rappresentazione parziale della griglia in quanto le figure sono state ottenute considerando 1 ogni 12 punti della griglia vera. Come si può vedere essa è infittita nella regione delle pareti e degli spigoli allo scopo di catturare le diverse scale del fenomeno. Infatti la griglia è stata ottenuta attraverso 24 diversi sottoboschi cubici che permettono appunto di addensare i punti in prossimità delle pareti e del piano.

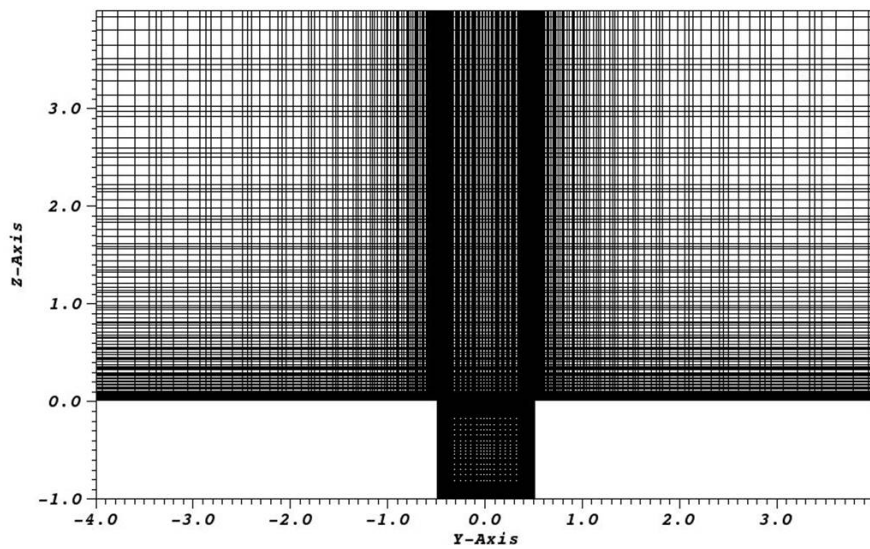


Figura 6.3: Proiezione del dominio computazionale secondo il piano yz.

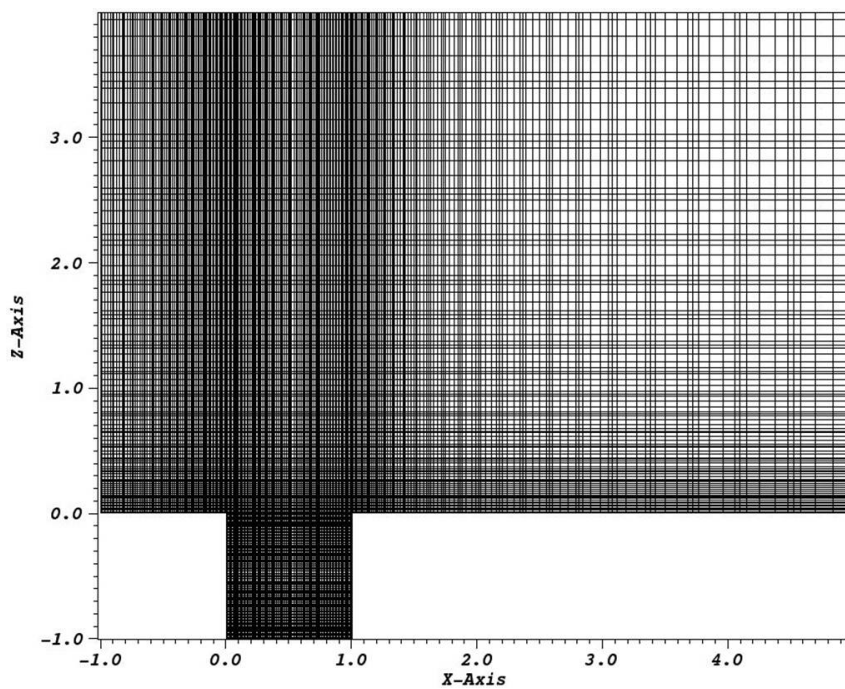


Figura 6.4: Proiezione del dominio computazionale secondo il piano xz.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno dobbiamo distinguere tra flusso base e problema agli autovalori. Allora abbiamo per

- Ω_{in} – *Inflow Boundary*

- Flusso Base - Il flusso che investe la cavità è uno strato limite con profilo di velocità alla Blasius ottenuto dalla soluzione delle equazioni di Prandtl su lastra piana semi-infinita investita da un flusso uniforme avente velocità U .
- Problema agli autovalori - Per la soluzione del problema agli autovalori si è utilizzata una condizione alla Dirichlet ovvero

$$u = v = w = 0 \quad (6.32)$$

- Ω_{out} – *Outflow Boundary*

- Flusso Base - In questo caso viene imposta una condizione alla Neumann cioè che il gradiente delle componenti di velocità in direzione z sia nullo, cioè

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (6.33)$$

- Problema agli autovalori - Per la soluzione del problema agli autovalori si è utilizzata una condizione analoga e cioè

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6.34)$$

- Ω_{right} e Ω_{left} – *Lateral Boundary*

- Flusso Base - Sui due piani laterali di estremità viene imposta una condizione di simmetria che consiste nell'imporre che il gradiente delle componenti della velocità contenute nel piano, ovvero la U e la W , sia zero in direzione y e che la componente della velocità normale alla parete laterale sia zero, ovvero

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad V = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad (6.35)$$

- Problema agli autovalori - Anche in questo caso viene imposta una condizione di simmetria analoga a quella del flusso base, il che significa

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad v = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (6.36)$$

- Ω_{upper} – *Upper Boundary*

- Flusso Base - La condizione all'infinito è una condizione alla Neumann

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (6.37)$$

- Problema agli autovalori - Anche nel caso del problema agli autovalori, la condizione all'infinito si traduce in una condizione alla Neumann

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (6.38)$$

- Ω_{lower} – *Lower Boundary*

- Flusso Base - Condizione di *no – sleep* ovvero di velocità nulla sulle pareti solide sia del piano che della cavità
- Problema agli autovalori - Condizione di *no – sleep* ovvero di velocità nulla sulle pareti solide sia del piano che della cavità

6.2.3 Simulazioni e Risultati

Diverse simulazioni numeriche sono state effettuate sulla cavità 3D al variare del numero di Reynolds allo scopo di individuare il numero di Reynolds critico. Le simulazioni sono state effettuate utilizzando polinomi del sesto ed ottavo ordine, questi ultimi solo per verificare l'accuratezza e la convergenza dei calcoli. Nella tabella 6.1 sono riportate le principali informazioni sui calcoli effettuati. In particolare, nella prima colonna è riportato il numero di Reynolds a cui è stata effettuata la simulazione, mentre nelle colonne successive sono riportati il valore del parametro L/D (in questi calcoli sempre uguale a 1, sebbene fossero state pianificate simulazioni all'aumentare di questo parametro), le dimensioni del dominio ed infine il numero di gradi di libertà del problema che come si vede è dell'ordine di 10^8 . Proprio le dimensioni della griglia e il costo computazionale hanno limitato il numero dei casi investigati perché, nonostante l'uso in alcuni casi di 4000 processori ed in altri di 8000, il tempo di calcolo richiesto per ogni singolo *run* era

comunque elevato in quanto dell'ordine di 3 giorni nel primo caso e di circa due nel secondo caso.

N. Reynolds	L/D	Dimensione del Dominio	n.o.f
2000	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
3000	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
4000	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
5000	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
6000	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
6900	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
7000	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
7250	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000
7500	1	$[-1.0, 5.0] \times [-4.0, 4.0] \times [-1.0, 5.0]$	145000000

Tabella 6.1: Caratteristiche della *mesh* per i calcoli sulla cavità 3D e numeri di Reynolds investigati.

Il primo calcolo è stato effettuato al numero di Reynolds 2000. Una volta ottenuta la convergenza (residuo $\frac{du}{dt} \leq 10^{-5}$), la soluzione ottenuta è stata utilizzata come condizione iniziale per il calcolo al Reynolds successivo e questo fino ad arrivare al numero di Reynolds 7500. Tra Reynolds 7000 e 7250 abbiamo trovato una biforcazione di Hopf che rende il flusso non più stazionario ma periodico come si può desumere dal grafico del residuo delle equazioni, cioè dal grafico della norma L^2 mostrato in figura 6.5 ed ottenuto considerando 600 unità temporali. Come si può notare, il residuo si ripete identicamente all'aumentare delle unità temporali.

Come già accennato all'inizio del capitolo, questi risultati sono stati ottenuti nell'ultima fase della tesi e la mole di dati da processare ed analizzare è enorme. Allo scopo di illustrare i principali risultati ottenuti in questa tesi qui vengono illustrati i valori delle componenti della velocità sia nella cavità che a valle di essa ed i valori della pressione nel caso di Reynolds critico. In questo modo si potranno formulare delle interessanti ipotesi sul meccanismo che regola le instabilità nella cavità cubica.

La componente di velocità in direzione x è molto più grande delle altre due componenti. Figura 6.6 mostra la distribuzione del modulo della velocità totale nei due piani xz e yz. Questa distribuzione di velocità è indicativa della componente u della velocità. Si osservi vicino alle pareti la regione più chiara, essa indica la presenza dello strato limite.

Più avanti vedremo più nel dettaglio le distribuzioni delle componenti di velocità grazie a delle sezioni.

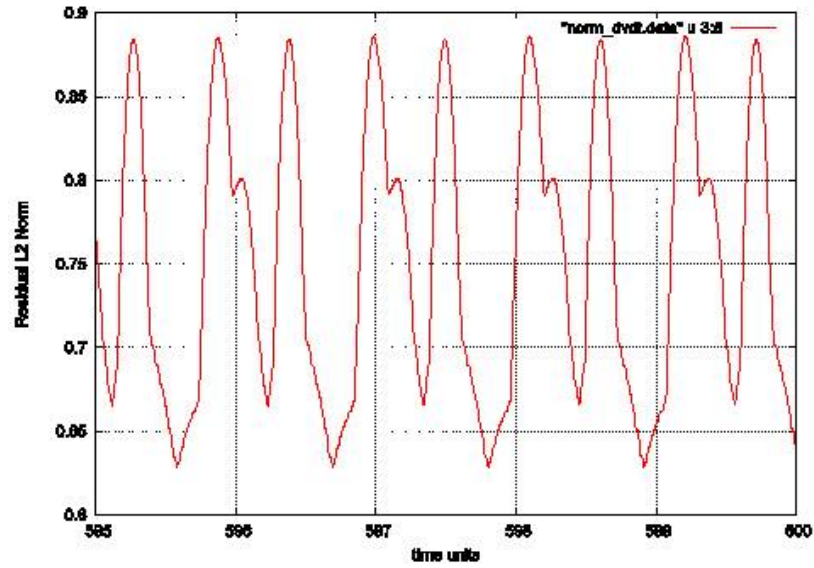


Figura 6.5: Residuo delle equazioni ovvero grafico della norma L^2 .

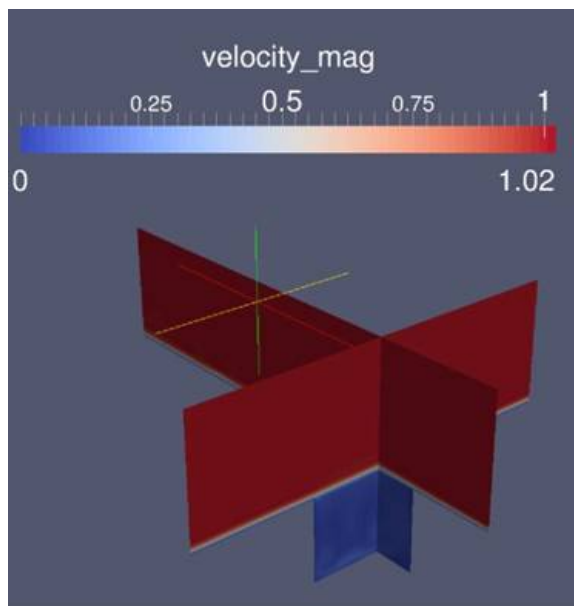


Figura 6.6: Distribuzione del modulo della velocità nei due piani xz e yz.

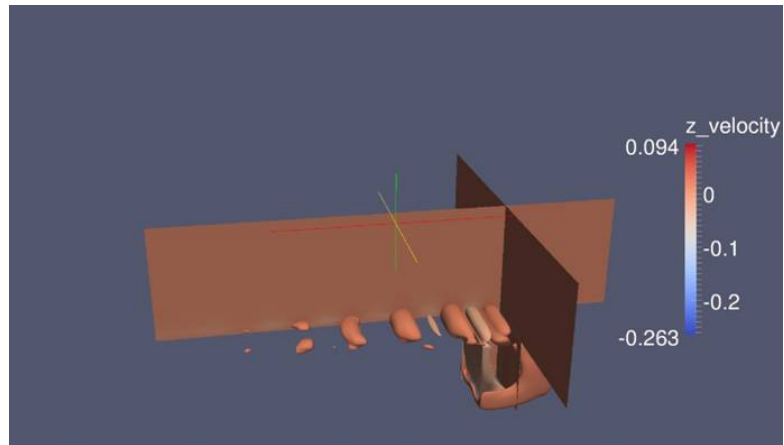


Figura 6.7: Distribuzione 2D (nel piano xz) e 3D della componente di velocità w .

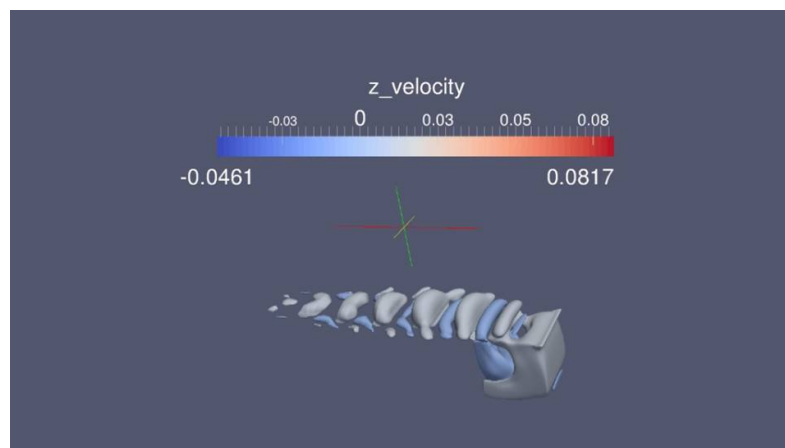


Figura 6.8: Distribuzione 3D della componente di velocità w a valle della cavità.

Nella figura 6.7 è riportato contemporaneamente sia il grafico, nel piano xz , della componente della velocità w in direzione y (apertura cavità) che la sua rappresentazione 3d. Mentre la figura 6.8 fornisce una distribuzione 3D della stessa componente di velocità evidenziando la sua l'evoluzione a valle della cavità, in direzione dell'asse x .

Si osserva, specie dalla figura 6.8, che il flusso sviluppa strutture vorticosi a valle della cavità.

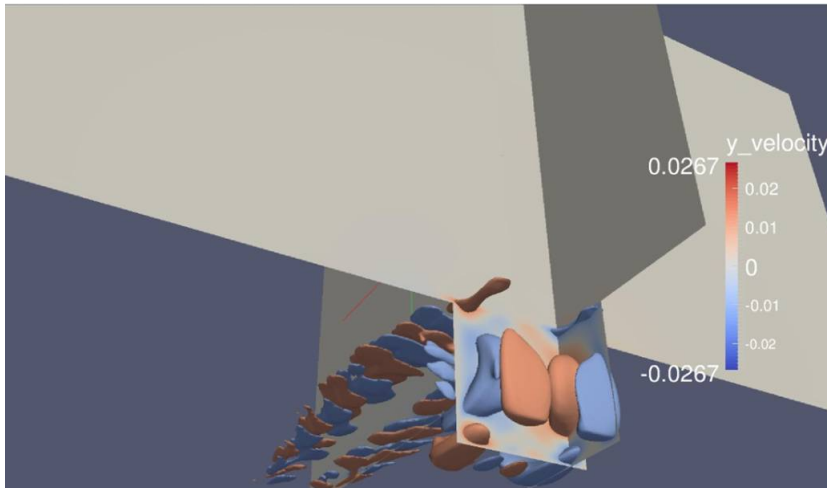


Figura 6.9: Distribuzione 3D della componente di velocità v (vista dal basso).

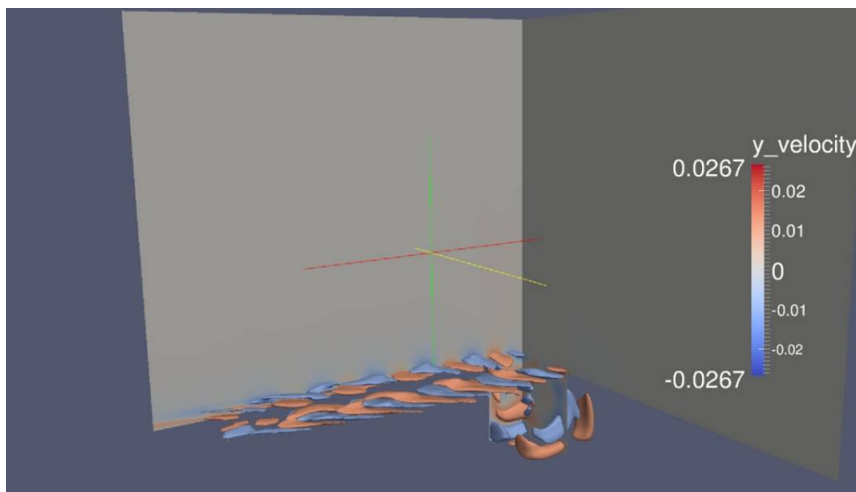


Figura 6.10: Distribuzione 3D della componente di velocità v a valle della cavità.

La distribuzione della componente v della velocità, mostrata sia in figura

6.9 che 6.10, conferma la presenza di strutture vorticoshe nella regione a valle delle cavità. Osservando la distribuzione di pressione, si osserva che solo nella regione a valle della cavità sono presenti delle perturbazioni. La figura 6.11 mostra la distribuzione di pressione che un osservatore posto nel primo spigolo della cavità vede sviluppare a valle di essa.

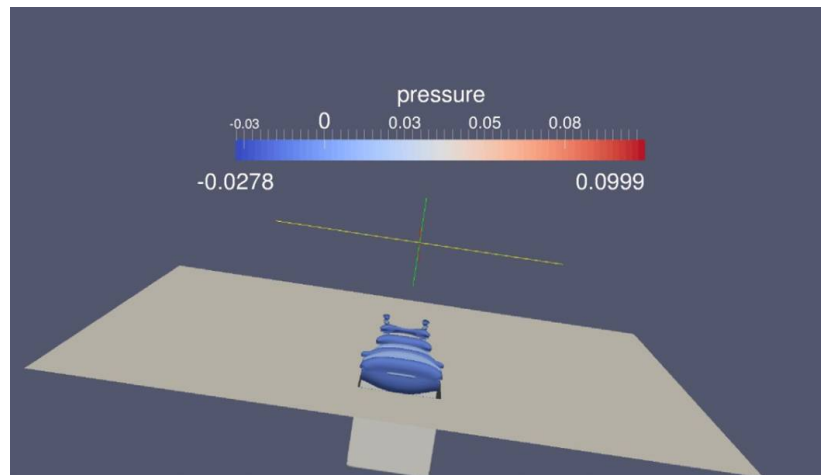


Figura 6.11: Distribuzione di pressione nel dominio di calcolo - vista anteriore.

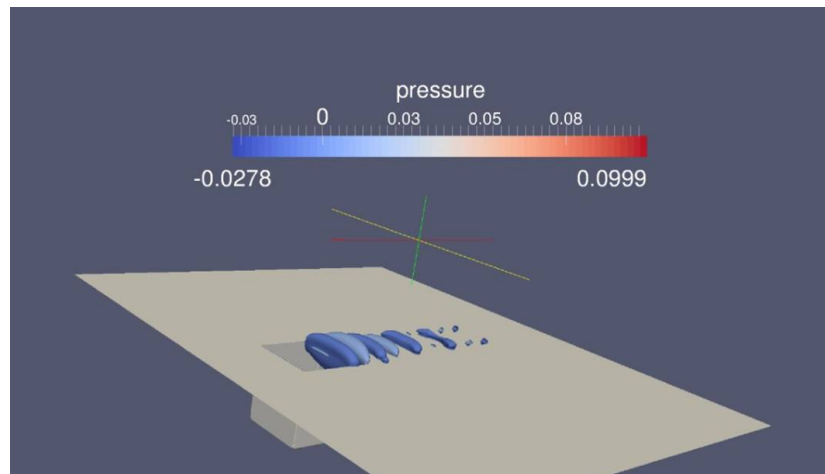


Figura 6.12: Distribuzione di pressione nel dominio di calcolo - vista laterale.

I disturbi di pressione sono più evidenti osservando la figura 6.12 che fornisce una vista laterale della distribuzione di pressione. Da questa figura si notano i vortici che nascono dall'impatto del flusso sul secondo spigolo e che poi propagano a valle.

Per ottenere maggiori dettagli sull'evoluzione del flusso, sia nella cavità che nella regione a valle, abbiamo deciso di visualizzare le precedenti grandezze (cioè componenti di velocità e pressioni) in due piani perpendicolari fra loro, ovvero nel piano xz e nel piano yz .

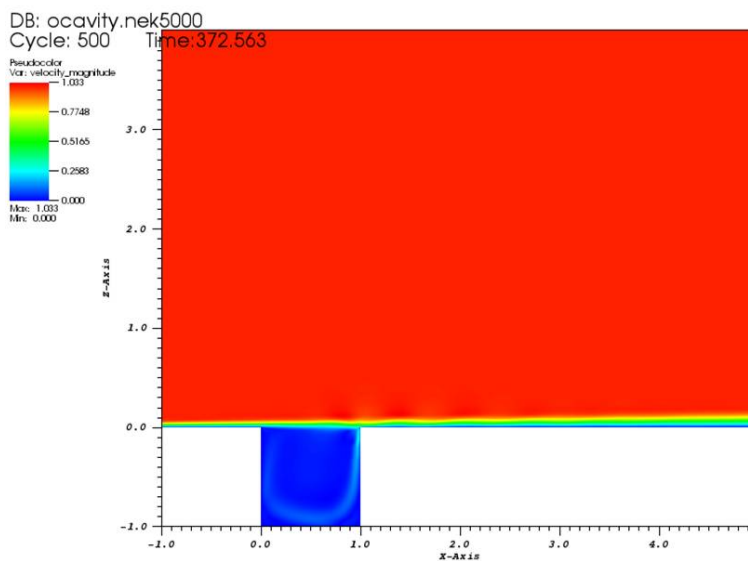


Figura 6.13: Distribuzione del modulo della velocità nel piano xz .

La figura 6.13 mostra la distribuzione del modulo della velocità nel piano xz . La velocità risulta quasi uniforme nella cavità dove si nota una debole struttura vorticoso. Osserviamo inoltre un ispessimento dello strato limite a valle del secondo spigolo della cavità dovuto probabilmente allo sviluppo di instabilità di tipo convettivo che vengono trasportate a valle. Dall'analisi della figura 6.14, che mostra la distribuzione della componente w della velocità, si intuisce la presenza di un vortice principale nella cavità ed il rilascio, dal secondo spigolo della cavità, di vortici contro rotanti che vengono trasportati a valle dove dissipano nello strato limite inspessendolo. La distribuzione di velocità v lungo l'apertura della cavità (lungo l'asse y), mostra anche la presenza di due ulteriori vortici negli spigoli inferiori della cavità e dei disturbi che propagano nello strato limite a valle della cavità.

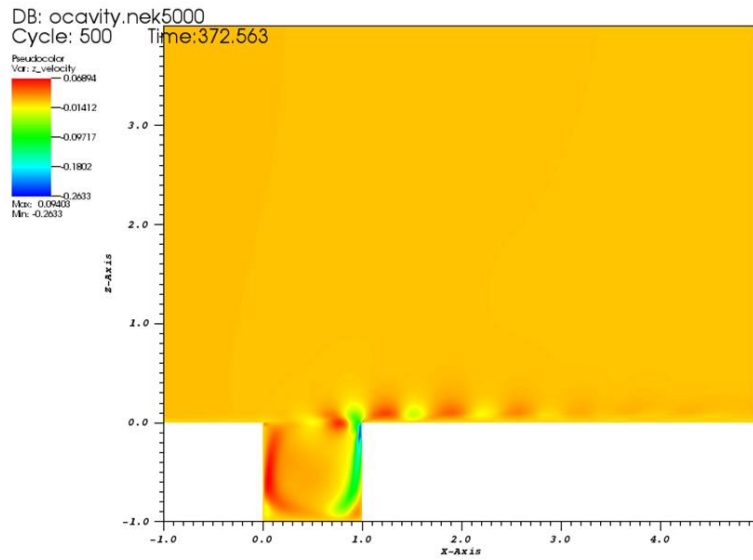


Figura 6.14: Distribuzione della componente w della velocità nel piano xz .

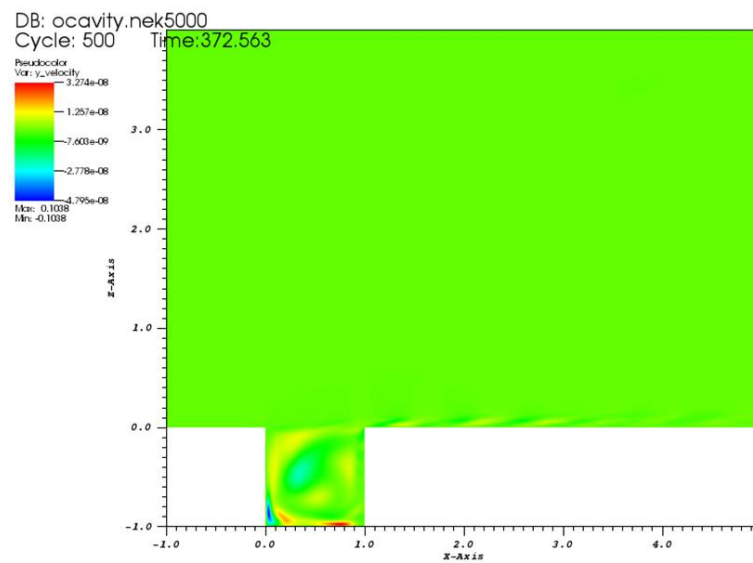


Figura 6.15: Distribuzione della componente v di velocità nel piano xz .

La distribuzione di pressione nel piano xz , mostrata in figura 6.16, evi-

denza strutture vorticoso nello *shear layer* che poi propagano a valle nello strato limite. La cavità sembra fungere da scalino, cioè la morfologia del flusso sembra molto simile a quello del *forward step*, cioè il flusso impatta nello spigolo e dà origine a questi vortici che, in modo convettivo, muovono a valle.

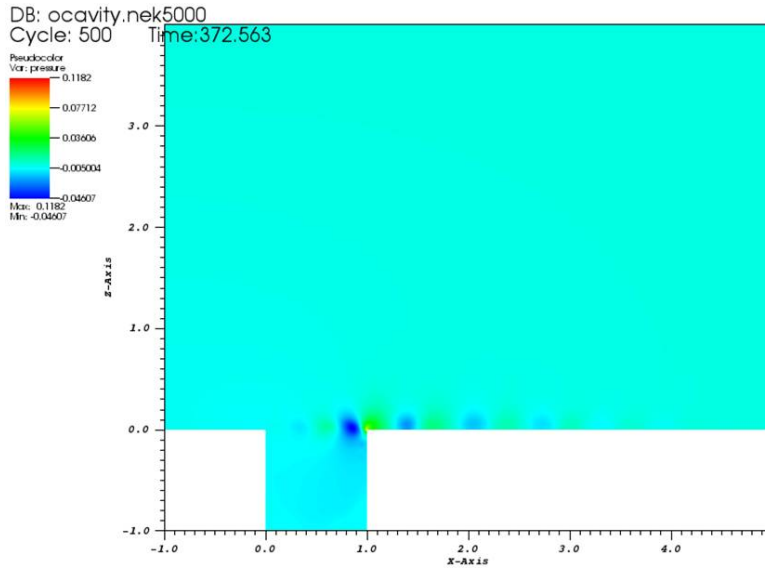


Figura 6.16: Distribuzione della pressione nel piano xz.

Analizziamo ora le visualizzazioni nel piano yz. La figura 6.17 mostra la distribuzione del modulo della velocità totale nel piano trasversale alla direzione del flusso preso nella mezzeria della cavità. Lo strato limite sulle due pareti laterali adiacenti alla cavità è ovunque uniforme, mentre mostra un ispessimento sulla cavità molto probabilmente dovuto ai vortici nello *shear layer*. La visualizzazione della componente u della velocità, mostrata in figura 6.18, conferma quanto già detto per il modulo.

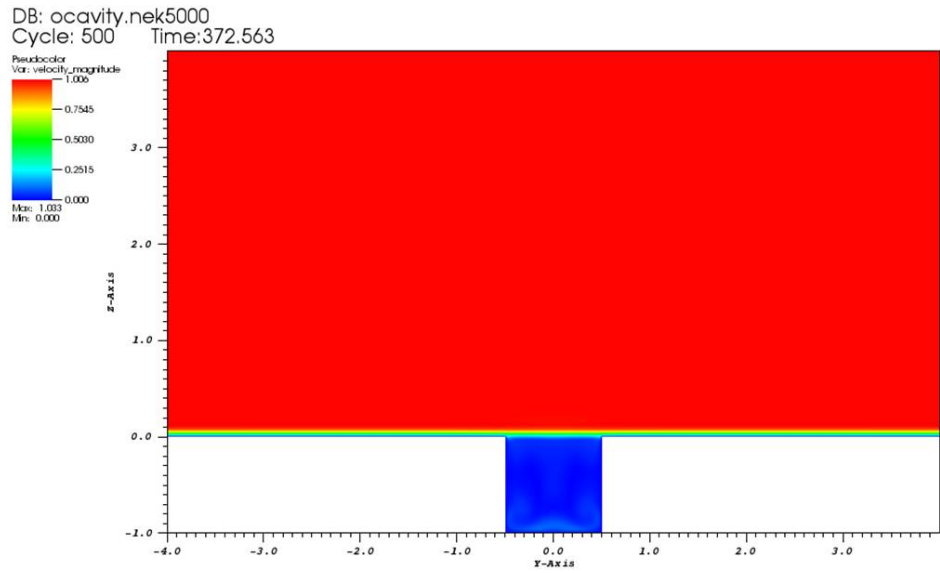


Figura 6.17: Distribuzione del modulo della velocità nel piano yz.

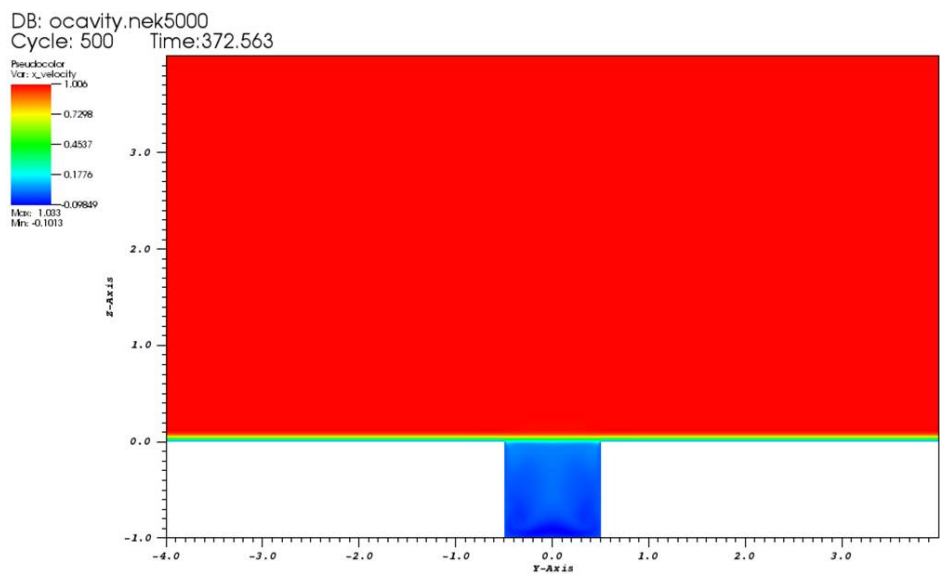


Figura 6.18: Distribuzione della componente u della velocità nel piano yz.

La distribuzione della componente w della velocità mostra all'interno della cavità delle strutture contro rotanti e perfettamente simmetriche rispetto al piano xz , ma di bassa intensità, come si può osservare dalla figura 6.19. La figura 6.20 mostra invece la visualizzazione della componente *spanwise* della velocità, ossia la v , e come si può notare essa è praticamente uniforme. La distribuzione di pressione nel piano yz evidenzia una regione di alta pressione nella zona superiore allo *shear layer*, come si può vedere dalla figura 6.21, probabilmente dovuta al fatto che il flusso sente la presenza del secondo spigolo su cui successivamente impatta.

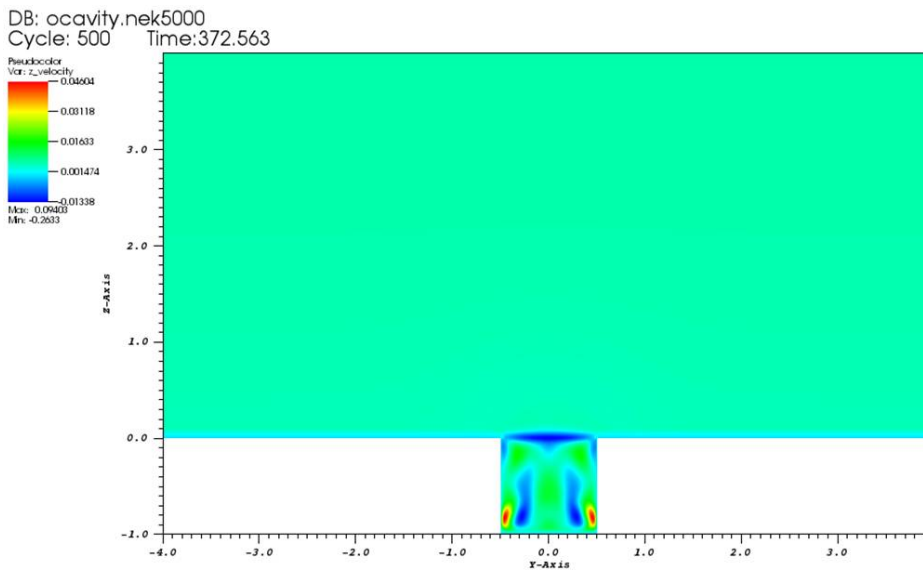


Figura 6.19: Distribuzione della componente w della velocità nel piano yz .

Sulla base di questi dati preliminari si possono fare alcune congetture. Innanzitutto, le instabilità, a differenza del caso della cavità 2.5D, sono localizzate all'esterno della cavità e non all'interno. Le informazioni più interessanti sono proprio fornite dalle visualizzazioni nel piano xz , specie dalla pressione e dalla componente w della velocità che mostrano queste strutture vorticosi di tipo convettivo che vengono trascinate a valle. Di conseguenza si potrebbe ipotizzare che il meccanismo delle instabilità nel caso della cavità cubica ha più delle similitudini con le instabilità che si sviluppano nella cavità puramente 2D, cioè una instabilità come quella teorizzata da Sipp per la cavità 2D, ovvero del tipo *wake mode*. Ovviamente, questa conclusione può applicarsi solo al caso di cavità cubica, in quanto c'è da aspettarsi che

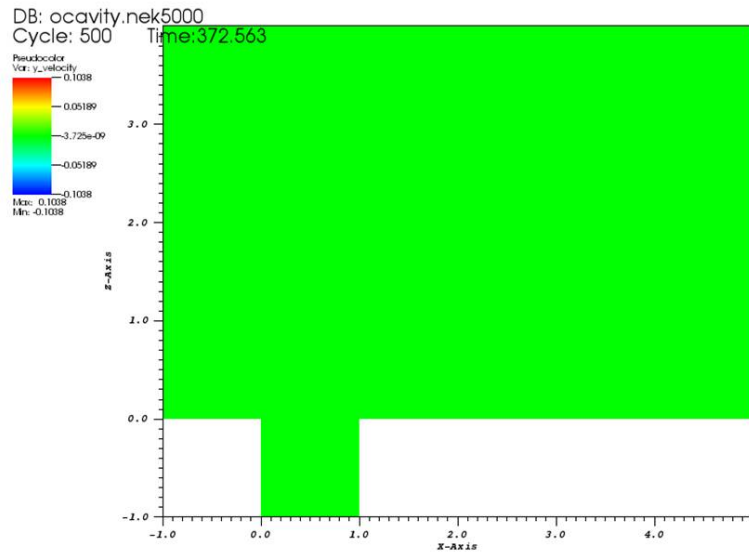


Figura 6.20: Distribuzione della componente v della velocità nel piano yz.

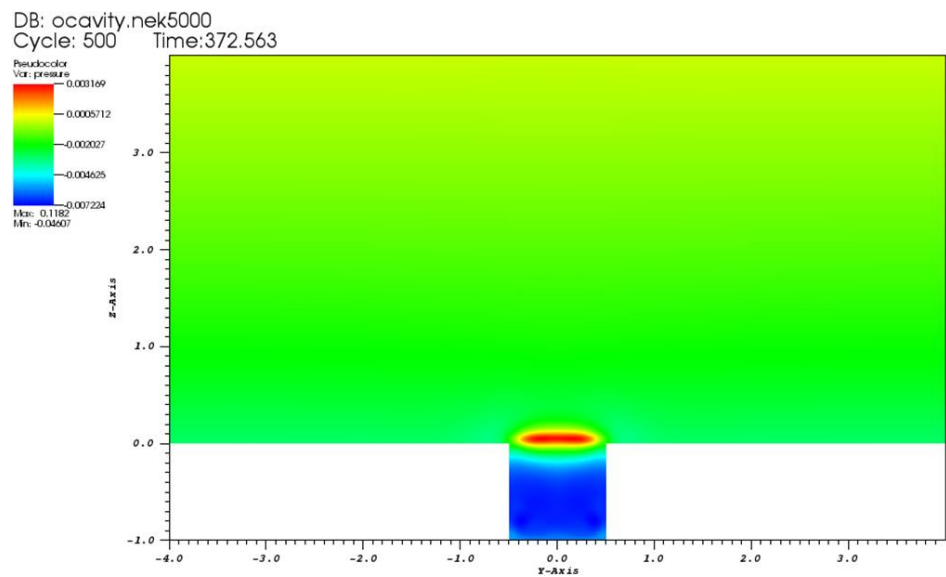


Figura 6.21: Distribuzione della pressione nel piano yz.

al variare della dimensione *spanwise* della cavità, il tipo di instabilità che si innesca cambi. *É* presumibile che all'aumentare della larghezza della cavità rispetto alla lunghezza, cioè all'aumentare dell'*Aspect Ratio*, il meccanismo che governa le instabilità nella cavità sia completamente diverso. Dagli esperimenti condotti nel progetto VCELL2050, citato nell'introduzione della tesi, si notarono sperimentalmente delle oscillazioni in direzioni dell'apertura della cavità che dipendevano appunto dall'*Aspect Ratio*. *É* ovvio che ulteriori approfondimenti e ulteriori calcoli sono necessari.

Purtroppo in questa tesi, la messa a punto delle procedure di calcolo per le simulazioni ha richiesto un tempo notevole data la complessità del calcolo stesso, inoltre il numero di ore di CPU spese solo per le simulazioni su cavità cubiche è stato nettamente superiore al milione di ore, per cui non è stato ad oggi possibile effettuare altri calcoli (non disponibilità di altre risorse di calcolo) al variare dell'*Aspect Ratio*.

Occorre anche dire che, data l'enorme mole di dati prodotti non è stato nemmeno possibile eseguire una approfondita analisi dei dati esistenti nè vi è stato il tempo di analizzare il risultati della stabilità globale. Questo lavoro continuerà nei mesi a venire e si sta anche valutando seriamente la possibilità di progettare ed eseguire anche degli esperimenti ad hoc presso il CIRA per avere un confronto numerico sperimentale.

Capitolo 7

Conclusioni

In questa tesi si è affrontato il problema delle instabilità nei flussi in cavità sia aperte che chiuse. L'esigenza di questo studio è stata ampiamente descritta nella introduzione ed è strettamente legata al fatto che queste instabilità danno origine a vibrazioni che sollecitano le strutture a fatica e generano rumore. Quindi diventa fondamentale capire ed approfondire le conoscenze sui meccanismi che governano queste instabilità che si innescano nelle cavità. Infatti, queste conoscenze permettono di sviluppare tecniche per il controllo del flusso nella cavità in modo da ridurre gli effetti negativi prodotti dalle instabilità. Dallo studio bibliografico condotto in questa tesi è risultato che studi sperimentali sulle instabilità in cavità puramente 2D sono stati eseguiti sin dagli anni cinquanta, seguiti poi da numerosi lavori teorico numerici che hanno evidenziato l'esistenza di diversi tipi di instabilità quali ad esempio i modi di Rossiter, noti anche come *shear layer modes*) oppure i *Wake Mode Oscillations* ben descritti da Sipp. Negli ultimi venti anni, invece, gli studi si sono concentrati sulle instabilità che si innescano nelle cavità 2.5D (così denominate per analogia al concetto di ala infinita), cioè quelle cavità avente dimensione infinita in direzione dell'apertura. Pur essendoci molti lavori in letteratura, ci sono ancora molte cose che vanno chiarite ed in questa tesi, si è inteso dare un contributo alle conoscenze sulla fenomenologia delle instabilità che si sviluppano per questa tipologia di cavità. A questo fine, sono state condotte sia analisi di stabilità globale che di sensitività strutturale per una cavità quadrata 2.5D investita da un flusso di Couette e da uno strato limite di Blasius. Inoltre, queste analisi sono state condotte anche per la cavità chiusa. Un codice *open source* agli elementi finiti FreeFem è stato utilizzato per condurre delle simulazioni numeriche per i tre casi citati. Le simulazioni hanno permesso di calcolare la stabilità globale e la sensitività e di visualizzare in tutti e tre i casi la

regione del *wavemaker*, cioè quella regione del campo di moto più sensibile a qualsiasi variazione strutturale del sistema che governa il moto. L'analisi dei risultati ha evidenziato che sia nel caso di cavità aperta che chiusa la regione del *wavemaker* è sempre contenuta tutta contenuta all'interno della cavità. D'altra parte, il numero d'onda per cui si verifica la prima instabilità è mediamente lo stesso per i tre casi analizzati,

- cavità aperta investita da flusso di Couette
- Cavità aperta investita da strato limite di Blasius
- Cavità chiusa

così come pure il numero di Reynolds Re_{av} basato sulla velocità media \tilde{U} lungo la linea che connette i due spigoli esterni della cavità, come mostrato nel capitolo 5. Tutto questo ha portato alla congettura dell'esistenza di un solo meccanismo che innesca le instabilità nelle cavità 2.5D (aperta o chiusa che essa sia). Questo tipo di instabilità si verifica ad un numero di Reynolds inferiore a quello della cavità pura 2D ed inoltre è dovuto ad una biforcazione di *Pitchforkstazionaria*.

Infine abbiamo investigato la cavità cubica effettuando una serie di costosissime (dal punto di vista computazionale) simulazioni numeriche utilizzando un metodo agli elementi spettrali in grado di coniugare la grande accuratezza dei metodi spettrali e la flessibilità degli elementi finiti nell'approssimare geometrie complesse. Il codice utilizzato è anche esso *open source* ed i calcoli sono stati effettuati sul cluster Fermi disponibile presso il CINECA utilizzando 4000 e 8000 processori in parallelo con tempi di calcolo di circa 3 giorni nel primo caso e due nel secondo. Sia analisi di stabilità globale che di sensitività strutturale sono state condotte al variare del numero di Reynolds secondo quanto riportato nella tabella 6.1 mostrata nel capitolo 6. Il numero delle ore di calcolo speso è stato nettamente superiore ad un milione di ore di calcolo ed ha portato all'esaurimento del *budget* disponibile.

La messa a punto della procedura di calcolo è stata abbastanza lunga ed i primi risultati sono stati disponibili solo negli ultimi due mesi. Questo non ha permesso una analisi dettagliata dei risultati, specie quelli di stabilità e di sensitività. Nel capitolo 6 sono stati mostrati i principali risultati in termini delle grandezze velocità e pressione. Da questa analisi preliminare è stato possibile effettuare delle congetture ed in particolare

- Le instabilità nel caso di cavità 3D si verificano a causa di una biforcazione di Hopf instazionaria come mostrato in figura 6.5 dove è

mostrato il diagramma del residuo delle equazioni che reggono il moto ovvero della norma L^2

- Le instabilità che si innescano nel caso di cavità 3D sono esterne alla cavità stessa, come è ben evidente dalle figure 3D 6.8, 6.10, 6.11, 6.12 o da quelle 2D quali 6.14, 6.16 e 6.21
- Le instabilità su cavità 3D hanno una similitudine con quelle studiate da Sipp e Lebedev [41], cioè sono del tipo *Wake Mode* e quindi sono più simile a quelle che si presentano in una cavità puramente 2D

Questa conclusione può applicarsi solo al caso di cavità cubica, in quanto c'è da aspettarsi che al variare della dimensione *spanwise* della cavità, il tipo di instabilità che si innesca cambi. È presumibile che all'aumentare della larghezza della cavità rispetto alla lunghezza, cioè all'aumentare dell'*Aspect Ratio*, il meccanismo che governa le instabilità nella cavità sia completamente diverso. Dagli esperimenti condotti nel progetto VCELL2050, citato nell'introduzione della tesi, si notarono sperimentalmente delle oscillazioni in direzioni dell'apertura della cavità che dipendevano appunto dall'*Aspect Ratio*. È ovvio che ulteriori approfondimenti e ulteriori calcoli sono necessari.

Per quanto riguarda le attività future il passo successivo è l'analisi completa dei risultati ottenuti. In particolare ricercare la regione del *wavemaker* allo scopo di convalidare queste congetture preliminari. Uno studio a parte sarà necessario anche per capire la morfologia del flusso che si instaura all'interno della cavità. Successivamente, si pensa di condurre ulteriori indagini sulla cavità 3D al variare dell'*Aspect Ratio* per capire se si verificano meccanismi diversi da quelli visto nel caso cubico. Infine, basato su queste indagini e sull'esperienza sperimentale pregressa, di progettare e pianificare un esperimento ad hoc che permetta un confronto numerico sperimentale.

Bibliografia

- [1] P. J. Schmid A. Barbagallo, D. Sipp. Closed-loop control of an open cavity flow using reduced-order models. *J. Fluid Mech.*, 218:1–50, 2009.
- [2] D.M Bortz H.T. Banks R.C. Smith A. D. Cain, A. Rubio. Optimizing control of open bay acoustics. *AIAA journal*, (2000-1928), 2000.
- [3] G. E. Karniadakis A. G. Tomboulides, S. A. Orszag. Direct and large-eddy simulation of axisymmetric wakes. *AIAA Paper*, (1993-0546), 1993.
- [4] S. A. Orszag A. G. Tomboulides, J. C. Y. Lee. Numerical simulation of low mach number reactive flows. *J. Sci. Comput.*, 12 (2):139–167, 1997.
- [5] F. De Gregorio P. Leyland P. Ott C. Hollenstein R.S. Donelli A. Marino, P. Peschke. High voltage pulsed dbd on the aerodynamic performance and on the shock buffet. JOINT ERCOFTAC-PLASMAERO PUBLIC WORKSHOP, Addison-Wesley, December 2012.
- [6] K. Suzuki A. Tezuka. Three-dimensional global linear stability analysis of flow around a spheroid. *AIAA journal*, 44:1697–1708, 2006.
- [7] A.V. Fedorov A. Tumin. Instability wave excitation by a localized vibrator in the boundary layer. *Appl. Mech. Tech. Phys*, 25:867–873, 1984.
- [8] F.C. Dewey J.A. Hitz A.F. Charwat, J.N. Roos. An investigation of separated flows part 1: The pressure field. *Journal of Aerospace Sciences*, 28(6):457–470, 1961.
- [9] F.C. Dewey J.A. Hitz A.F. Charwat, J.N. Roos. An investigation of separated flows part 2. flow in the cavity and heat transfer. *Journal of Aerospace Sciences*, 28(7):513–527, 1961.

-
- [10] A.I.D.A.A. (Associazione Italiana di Aeronautica ed Astronautica Roma). *Application of the Ray-Tracing Theory to the Stability Analysis of the Three-Dimensional Incompressible Boundary Layer*, Atti del XIII congresso nazionale AIDAA, Settembre 1995.
- [11] AIMETA. *Linear stability analysis of three-dimensional lid-driven cavity flow.*, number No 738 in Atti 19th Congr. AIMETA Mecc. Teor. Appl., Ancona, Italy, 2009. Aras Edizioni.
- [12] C. Marongiu P. Peschke C. Hollenstein R. Donelli A. Marino, P. Catalano. Effect of high voltage pulsed dbd plasma on the aerodynamic performance in subsonic and transonic conditions. Number AIAA 2013-2752, San Diego, CA, June 24-27 2013. 43rd AIAA Fluid Dynamics Conference.
- [13] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iteration in the solution of the matrix eigenproblem. *Quart. Appl. Math.*, 9:17–29, 1951.
- [14] O. Pironneau B. Lucquin. *Scientific Computing for Engineers*. Wiley, 1998.
- [15] F. Lusseyran P. Gougat B. Podvin, Y. Fraigneau. A reconstruction method for the ow past an open cavity. *J. Fluids Eng.*, 128:531–540, 2006.
- [16] H.F. Voyè B.D. Reddy. Finite element analysis of the stability of fluidmotions. *Journal of Computational Physics*, 79:92–112, 1988.
- [17] P.J. Ioannou B.F. Farrel. Generalized stability theory. part i: autonomous operators. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 53:2025–2040, 1996.
- [18] H. Eckelmann B.R. Noak. A low-dimensional galerkin method for the three-dimensional flow around a circular cylinder. *phys. fluids* 6:124–143. *Physics of Fluids*, 6:124–143, 1994.
- [19] R. Briggs. *Electron-Stream Interaction with Plasmas*. Cambridge, MA, 1964.
- [20] Guillaume A. Brès. *Numerical Simulations of Three-Dimensional Instabilities in Cavity Flows*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, April 2007.
- [21] A. Quarteroni T.A. Zang C. Canuto, M.Y. Hussaini. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Springer, Berlin, 2006.

- [22] P. J. Schmid C. J. Mack. A preconditioned krylov technique for global hydrodynamic stability analysis of large-scale compressible flows. *J. Comput. Phys.*, 229:541–560, 2010.
- [23] C. Van Loan C. Moler. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM Review*, 20:801–836, 1978.
- [24] C. Van Loan C. Moler. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM Review*, 45:1–46, 2003.
- [25] A.T. Patera C.H. Amon. Numerical calculation of stable three-dimensional tertiary states in grooved channel flow. *Physics of Fluids A*, 1:2005–2009, 1989.
- [26] J. Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows: non-normality and non linearity. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 37:357–392, 2005.
- [27] P.J. Morris C.M. Shieh. Parallel computational aeroacoustic simulation of turbulent subsonic cavity flow. *AIAA journal*, (2000-1914), 2000.
- [28] T. Colonius. An overview of simulation, modeling, and active control of flow/acoustic resonance in open cavities. In *in Proceedings of the 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, number 2001-0076, Reno, Nev, USA,, 2001. AIAA.
- [29] W. Couzy. *Spectral element discretization of the unsteady Navier–Stokes equations and its iterative solution on parallel computers*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland., 1995.
- [30] A.J. Basu C.W. Rowley, T. Colonius. On self-sustained oscillations in two-dimensional compressible flow over rectangular cavities. *J. Fluid Mechanical*, 455:315–346, 2002.
- [31] T. Colonius R.M. Murray D.G. MacMartin D. Fabris C.W. Rowley, D.R. Williams. Model-based control of cavity oscillations, part ii: System identification and analysis. *AIAA journal*, (2002-0972), 2002.
- [32] T. Colonius R.M. Murray D.G. MacMynowsky C.W. Rowley, D.R. Williams. Linear models for control of cavity flow oscillations. *J. Fluid Mechanical*, 547:317–330, 2006.

-
- [33] R.D. Henderson D. Barkley. Three-dimensional floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 322:215–241, 1996.
- [34] T. Lachand-Robert K. Ohtsuka O. Pironneau D. Bernardi, F. Hecht. Freefem+ for macs, pcs, linux: Documentation. Report, INRIA, Rocquencourt, 2001.
- [35] L. F. East D. J. Maull. Three-dimensional flow in cavities. *J. Fluid Mech.*, 16:620–632, 1963.
- [36] F. Nicolosi D. P. Coiro, E. F. Bellobuono and R. Donelli. Improving aircraft endurance through turbulent separation control by pulsed blowing. *Journal of Aircraft*, 45, No 3:990–1001, 2009.
- [37] C. Knisely D. Rockwell. Observations of the three-dimensional nature of unstable ow past a cavity. *Phys. Fluids*, 23 (3):425–431, 1980.
- [38] E. Naudascher D. Rockwell. Review-self sustaining oscillations of flow past cavities. *Journal of Fluids Engineering*, 100:152–165, 1978.
- [39] E. Naudascher D. Rockwell. Self-sustained oscillations of impinging free shear layers. *Annual Review Fluid Mechanics*, 11:67–94, 1979.
- [40] V. Theofilis D. Rodriguez. Massively parallel numerical solution of the biglobal linear instability eigenvalue problem using dense linear algebra. *AIAA Journal*, 47:2449–2459, 2009.
- [41] A. Lebedev D. Sipp. Global stability of base and mean flows: a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *J. Fluid Mech*, 593:333–358, 2007.
- [42] L. Jacquin D. Sipp. Three-dimensional centrifugal-type instabilities of twodimensional flows in rotating systems. *Phys. Fluids*, 12:1740–1748, 2000.
- [43] H. Schütz F. Thiele D. Wolter, M. Morzyński. Numerische untersuchungen zur stabilität der kreiszylinderströmung. *Z. Angew. Math. Mech.*, 69:601–604, 1989.
- [44] A.B. Cain D.F. Fulgsang. Evaluation of shear layer cavity resonance mechanisms by numerical simulation. *AIAA journal*, (92-0555), 1992.

- [45] H. A. Dijkstra. On the structure of cellular solutions in rayleigh-benard-marangoni flows in small-aspectratio containers. *Journal of Fluid Mechanics*, 243:73–102, 1992.
- [46] M.R. Visbal D.P. Rizzetta. Large-eddy simulation of supersonic cavity flowfields including flow control. *AIAA journal*, 41-8:1452–1462, 2003.
- [47] A. Buttari P. Combes A. Guermouche J.Y. L’Excellent T. Slalova B. Ucar E. Agullo, P. Amestoy. Overview of mumps (a multifrontal massively parallel solver). <http://mumps.enseeiht.fr/>; <http://mumps.enseeiht.fr/index.php>. CERFACS, ENSEEIHT-IRIT, INRIA, June 2008.
- [48] A. Guermouche E. Agullo and J.-Y. L’Excellent. Reducing the i/o volume in sparse out-of-core multifrontal methods.. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(6):4774–4794, 2010.
- [49] U. Ehrenstein D.S. Henningson E. Akervik, J. Hoepffner. Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global modes. *J. Fluid Mech.* 579:305–314, 2007.
- [50] U. Rist E. Piot, G. Casalis. Stability of the laminar boundary layer flow encountering a row of roughness elements: Biglobal stability approach and dns. *European Journal of Mechanics . B Fluids*, 27:684–706, 2008.
- [51] L.F. East. Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities. *Journal of Sound and Vibration*, 3:277–287, 1966.
- [52] Ekip. <http://www.ekip-aviation-concern.com/eng-b/4.shtml>, accessed 10.08.2008, july 1994.
- [53] P. Luchini F. Giannetti. Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 581:167–197, 2007.
- [54] P. Luchini F. Giannetti. Structural sensitivity of the first instability of the cylinder wake. *J. Fluid Mech.*, 581:167–197, 2007.
- [55] O. Pironneau F. Hecht. *FreeFem++: Manual*. INRIA, Paris, <http://www.freefem.org> edition.
- [56] J.P. Brazier F. Longueteau. Biglobal stability computations on curvilinear meshes. *C. R. Mécanique*, 336:828–834, 2008.

- [57] P. F. Fischer. An overlapping schwarz method for spectral element solution of the incompressible navier–stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 133 (1):84–101, 1997.
- [58] P. F. Fischer. Projection techniques for iterative solution of with successive right-hand sides. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 163(1-4):193–204, 1998.
- [59] N. Fiétier. Detecting instabilities in flows of viscoelastic fluids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 42:1345–1361, 2003.
- [60] O. Marxen G. Groskopf, M.J. Kloker. *7th IUTAM Laminar-Turbulent Transition Symposium*, chapter Bi-global crossplane stability analysis of high-speed boundary-layer flows with discrete roughness, pages 171–176. P. Schlatter, D.S. Henningson, Stockholm, 2010.
- [61] F. de Gregorio G. M. Di Cicca G. Iuso, R. S. Donelli. Effects of 2d synthetic jet orientation on a turbulent boundary layer. ISCHIA, April 2006. Workshop Ercoftac, ERCOFTAC.
- [62] T. Colonius G.A. Bres. Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities. *J. Fluid Mech.*, 599:309–339, 2008.
- [63] S.J. Sherwin G.E. Karniadakis. *Spectral/hp Element Methods for CFD.*, volume second ed. Oxford Univ. Press. 2nd ed, New York, 2005.
- [64] P. F. Fischer H. M. Tufo. Fast parallel direct solvers for coarse grid problems. *Parallel Distrib. Comput.*, 61 (2):151–177., 2001.
- [65] L. Lassiter H. Plumblee, J.S. Gibson. A theoretical and experimental investigation of the acoustic response in aerodynamic flow. Technical Report TR-61-75, WADD, WADD, 1962.
- [66] F. Hecht. *BAMG: Bidimensional Anisotropic Mesh Generator*. INRIA, Rocquencourt, 1998.
- [67] D.S. Henningson. Henningson ds. 1987. stability of parallel inviscid shear flow with mean spanwise variation. Technical Report TN 1987-57, Aeronaut. Res. Inst. Sweden, FFA, 1987.
- [68] T. Herbert. Parabolized stability equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29:245–283, 1997.

- [69] G.M. Homsy. Global stability of time-dependent flows: impulsively heated or cooled fluid layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 60:129–139, 1973.
- [70] E. Kerschen J. Alvarez. A theoretical model for cavity acoustic resonances in subsonic flow. *AIAA journal*, (2004-2845), 2004.
- [71] E. Kerschen J. Alvarez. Influence of wind tunnel walls on cavity acoustic resonances. *AIAA journal*, (2005-2804), 2005.
- [72] Anderson R. H. Pletcher J. C. Tannehil, D. A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor and Francis, second edition edition, 1997.
- [73] D. Magidov J. D. Crouch, A. Garbaruk. Predicting the onset of flow unsteadiness based on global instability. *J. Comput. Phys*, 224:924–940, 2007.
- [74] V. Theofilis J. De Vicente, E. Gonzalez. Spectral multi-domain methods for biglobal instability analysis of complex flows over open cavity configurations. *AIAA Paper*, (2006-2877), 2006.
- [75] M. Olsson L. Eriksson J. Larsson, L. Davidson. Aeroacoustic investigation of an open cavity at low mach number. *AIAA journal*, 42(12):2462–2473, 2004.
- [76] J.L. Sesterhenn J. Schulze, P.J. Schmid. Exponential time integration using krylov subspaces. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 60:591–609, 2009.
- [77] C. P. Jackson. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 182:23–45, 1987.
- [78] Huerre L. Redekopp J.M. Chomaz, P. A frequency selection criterion in spatially developing flows. *Stud. Appl. Math*, 84, No. 2, :119–144., 1991.
- [79] L.G. Redekopp J.M. Chomaz, P. Huerre. Bifurcation to local and global modes in spatially developing flows. *Physical Review Letters*, 60:25–28, 1988.
- [80] F. Giannetti J.O. Pralits, L. Brandt. Instability and sensitivity of the flow around a rotating circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 650:513–536, 2010.

-
- [81] D.D. Joseph. Nonlinear stability of the boussinesq equations by the method of energy. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 22:163–184, 1966.
- [82] P. F. Fischer J.W. Lottes. Hybrid multigrid/schwarz algorithms for spectral element method. *J. Sci. Comput.*, 24:45–78, 2005.
- [83] H. Uzawa K. Arrow, L. Hurwicz. *Studies in Nonlinear Programming*. Stanford, USA., 1958.
- [84] S. Park K. Chang, G. Constantinescu. Analysis of the flow and mass transfer processes for the incompressible flow past an open cavity with a laminar and a fully turbulent incoming boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 561:113–145, 2006.
- [85] J. Mendoza K. K. Ahuja. Effects of cavity dimensions, boundary layer and temperature on cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes. Technical Report CR-4653, NASA., 1995.
- [86] A. M. Naguib K. Zhang. Effect of finite cavity width on flow oscillation in a low-mach-number cavity flow. *Experiments in Fluids*, 51:1209–1229, 2011.
- [87] H.B. Keller. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. i. *In Applications of Bifurcation Theory*, pages 359–384, 1977.
- [88] K. Krishnamurty. Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces. Technical Report TN-3487, NACA, 1955.
- [89] A. Rizzi L. E. Eriksson. Computer-aided analysis of the convergence to steady state of discrete approximations to the euler equations. *J. Comput. Phys*, 57:90–128, 1985.
- [90] Sagaut T. Lê P Comte L. Larchêveque, P. Large-eddy simulation of a compressible flow in a three-dimensional open cavity at high reynolds number. *J. Fluid Mech*, 516:265– 301, 2004.
- [91] V. Theofilis L. M. González, R. Gomez-Blanco. Eigenmodes of a counter-rotating vortex dipole. *AIAA Journal*, 46:2796–2805, 2008.

-
- [92] P. Luchini L. Marino. Global instabilities in spatially developing flows: non-normality and nonlinearity. *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 23:37–54, 2009.
- [93] De Gregorio F. Iuso G. Lasagna D., Donelli R. Effects of a trapped vortex cell on thick wing profile. *EXPERIMENTS IN FLUIDS*, 51(5):1369–1384, 2011.
- [94] A. Rizzi L.E. Eriksson. Computer-aided analysis of the convergence to steady state of discrete approximations to the euler equations. *Journal of Computational Physics*, 57:90–128, 1985.
- [95] Y. H. Yu M. Measurements of sound radiation from cavities at subsonic speeds. *Journal of Aircraft*, 14:838–843., 1977.
- [96] A. Roshko M. Gharib. The effect of flow oscillations on cavity drag. *J. of Fluid Mechanical*, 177:501–530, 1987.
- [97] A. Roshko M. Gharib. The effect of flow oscillation on cavity drag. *journal of Fluid Engineering*, 113:369–376, 1991.
- [98] F. Thiele M. Morzyński. Numerical stability analysis of flow about a cylinder. *Z. Angew. Math. Mech.*, 71:424–428, 1991.
- [99] E. H. Mund M. O. Deville, P. F. Fischer. *High Order Methods for Incompressible Fluid Flow*. Cambridge, UK, 2002.
- [100] E. Plentovich M.B. Tracy. Characterization of cavity pressure flow fields data obtained in langley 0.3m transonic cryogenic tunnel. Technical Report NASA-TM-4436, NASA Langley Research Center, 1993.
- [101] L. Fei C.L. Streett C.L. Chang M.H. Carpenter, M. Choudhari. Excitation of crossflow instabilities in a swept wing boundary layer. In *48th Aerospace Science Meeting Exhibition*, number 2010-0378, Orlando, 2010.
- [102] B. Mohammadi. *Fluid Dynamics Computation with NSC2KE: an User Guide*. INRIA, Rocquencourt, 1994.
- [103] D.A. Norton. Investigation of b47 bomb bay buffet. Tech. Report DN-D12675, Boeing Airplane Co., 1952.

- [104] J. M. Chomaz L. Jacquin O. Marquet, D. Sipp. Amplifier and resonator dynamics of a low-reynolds number recirculation bubble in a global framework. *Journal of Fluid Mechanics*, 605:429–443, 2008.
- [105] Sipp L. Jacquin O. Marquet, D. Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow. *J. Fluid Mech.*, 615:221–252, 2008.
- [106] R. Kerminbekov R. Donelli F. De Gregorio O.R. Tutty, M. Buffoni and E. Rogers. Control of flow with trapped vortices: Theory and experiments. *International Journal of Flow Control*, 5(2), June 2013.
- [107] T.W. Owen. Techniques of pressure-fluctuation measurements employed in the rae low speed wind tunnels. Technical Report A.R.C. - 20780, AGARD, 1958.
- [108] G. Joslin J.-Y. L&apostrophe;Excellent M. Sid-Lakhdar C. Weisbecker M. Forzan C. Pozza R. Perrin V. Pellissier. P. Amestoy, A. Buttari. Shared memory parallelism and low-rank approximation techniques applied to direct solvers in fem simulation in iee transactions on magnetics. *IEEE, Special issue, Compumag*, 2013.
- [109] O. Boiteau A. Buttari J.-Y. L&apostrophe;Excellent-C. Weisbecker P. Amestoy, C. Ashcraft. Improving multifrontal methods by means of block low-rank representations. Technical Report RR-8199., INPT-IRIT technical report and INRIA Technical Report, 2012.
- [110] M.O. Deville P. Demaret. Chebyshev collocation solutions of the navier-stokes equations using multidomain decomposition and finite element preconditioning. *Journal of Computational Physics*, 95:359–386, 1991.
- [111] Lottes S. G. Kerkemeier P. F. Fischer, J. W. nek5000 web page. page <http://nek5000.mcs.anl.gov.>, 20088.
- [112] P. A. Monkewitz P. Huerre. Local and global instabilities in spatially developing flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 22, No. 1:473–537., 1990.
- [113] A. Bottaro P. Luchini. Adjoint equations in stability analysis. *Annual Review Fluid Mechanics*, 46:493–517, 2014.
- [114] J. Koster J.-Y. L&apostrophe;Excellent P. R. Amestoy, I. S. Duff. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23 (1):15–41., 2001.

- [115] J.-Y. L'Excellent, S. Pralet, P. R. Amestoy, A. Guermouche. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32 (2):136–156., 2006.
- [116] D. Henningson, D. P. Schmid. *Stability and Transition in Shear Flows*. Berlin, 2001.
- [117] J.-M. Chomaz, P.A. Monkewitz, P. Huerre. Global linear stability analysis of weakly non-parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 251:1–20, 1993.
- [118] A. T. Patera. A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal Comput. Phys.*, 54:468–488, 1984.
- [119] J.B. Perot. An analysis of the fractional step method. *J. Comput. Phys.*, 108, 1993.
- [120] R.T. Pierrehumbert. Puniversal shortwave instability of two-dimensional eddies in an inviscid fluid. *phys. rev. lett.* 57:2157–2159. *Physical Review Letters*, 57:2157–2159, 1986.
- [121] H. Feshbach, P.M. Morse. *Methods of Theoretical Physics*, volume I, II. New York, 1953.
- [122] A. Powell. On edge tone and associated phenomena. *Acoustica*, 3(12):233–243, 1953.
- [123] A. Quarteroni. *Modellistica numerica per problemi differenziali*. Milan, 2006.
- [124] D. Sorensen, C. Yang, R. Lehoucq, K. Maschhoff. Arpack software. *website* : <http://www.caam.rice.edu/software/arpack/>, 2007.
- [125] D. Thomas, R. Lynch, J. Rice. Direct solution of partial difference equations by tensor product methods. *Numer. Math.*, 6:185–199, 1964.
- [126] A. Acrivos, R. Natarajan. The instability of the steady flow past spheres and disks. *Journal of Fluid Mechanics*, 254:323–344, 1993.
- [127] J. N. Shadid, T. J. Mountziaris, R. P. Pawlowski, A. G. Salinger. Bifurcation and stability analysis of laminar isothermal counterflowing jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 551:117–139, 2006.

-
- [128] G. M. Di Cicca R. S. Donelli, G. Iuso, editor. *Flow field development of an axysymmetric synthetic jet*, Firenze, Settembre 2005. AIMETA.
- [129] F. Wilcox R. Stallings. Experimental cavity pressure distributions at supersonic speeds. NASA-TP NASA-TP-2683, NASA, 1987.
- [130] Pierluigi Iannelli Raffaele S. Donelli, Fabrizio De Gregorio. Flow separation control by trapped vortex. 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Knopf, 2010.
- [131] J. Rossiter. Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Technical Report 3428, Aeronautic Research Council Reports and Memoranda, 1966.
- [132] A. Iollo L. Zannetti S. Chernyschenko R.S. Donelli, P. Iannelli. Flow models for vortex cell. *AIAA journal*, 47(2), February 2009.
- [133] S.E. Widnall R.T. Pierrehumbert. The two- and three-dimensional instabilities of a spatially periodic shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 114:59–82, 1982.
- [134] H. C. Kuhlmann S. Albensoeder. Nonlinear three-dimensional flow in the lid-driven square cavity. *J. Fluid Mech.*, 569:465–480, 2006.
- [135] H.J. Rath S. Albensoeder, H.C. Kuhlmann. Three-dimensional centrifugal-flow instabilities in the lid driven cavity problem. *Physics of Fluids*, 13:121–136, 2001.
- [136] P. J. Schmid D. S. Henningson S. Bagheri, P. Schlatter. Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 624:33–44, 2009.
- [137] F. Giannetti L. Brandt S. Haque, I. Lashgari. Stability of fluids with sheardependent viscosity in the lid-driven cavity. *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, 173-174:49–61, 2012.
- [138] L. Jacquin S. Yamouni, D. Sipp. Interaction between feedback aeroacoustic and acoustic resonance mechanisms in a cavity flow: a global stability analysis. *J. Fluid Mech.*, 717:134–165., 2013.
- [139] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. New York: McGraw Hill, 7th edition, 1979.

- [140] D. Sipp. Open-loop control of cavity oscillations with harmonic forcings. *J. Fluid Mech.*, 708:439–468, 2012.
- [141] et al. T. M. Faure, L. Pastur. Three-dimensional centrifugal instabilities development inside a parallelepipedic open cavity of various shape. *Experiment in Fluids*, 47:395–410., 2009.
- [142] V. Theofilis. On the verification and extension of the Görtler-Hämmerlin assumption in three-dimensional incompressible swept attachment-line boundary layer flow. Technical Report IB 223-97 A 44,, Dtsch. Zent. Luft- Raumfahrt, 1997.
- [143] V. Theofilis. Globally unstable flows in open cavities. *AIAA Paper*, (2000-1965), 2000.
- [144] V. Theofilis. Advances in global linear instability of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. Aerosp. Sci.*, 39(4):249–315, 2003.
- [145] V. Theofilis. Advances in global linear instability of nonparallel and three-dimensional flows. *Prog. Aerosp. Sci.*, 39(4):249–315, 2003.
- [146] F. Lusseyran L. Pastur. T.M. Faure, P. Adrianos. Visualizations of the flow inside an open cavity at medium range reynolds numbers. *Experiments in Fluids*, 42:169–184, 2007.
- [147] V. Theofilis J. Soria V. Kitsios, D. Rofriguez. Biglobal stability analysis in curvilinear coordinates of massively separated lifting bodies. *Journal of Computational Physics*, 228:7181–7196, 2009.
- [148] G. Gerbeth V. Shatrov, G. Mutschke. Three-dimensional linear stability analysis of lid-driven mhd cavity flow. *Phys. Fluids*, 15:2141–2151, 2003.
- [149] M. Gaster V. Saponitsky, E. Avital. On three-dimensional and control of incompressible cavity flow. *Phys. Fluids*, (17-104103), 2005.
- [150] A. Seifert V. Theofilis, T. Colonius. Global flow instability control symposium i. Crete, Greece, 2001. Madrid: Fund. General Univ. Politéc., AFOSR/EOARD/ERCFTAC SIG-33:.
- [151] C. Weisbecker. *Improving multifrontal solvers by means of algebraic block low-rank representations*. PhD thesis, INPT-IRIT, 2013.

- [152] M. Kawahara Y. Ding. Linear stability of incompressible flow using a mixed finite element method. *Journal of Computational Physics*, 139:243–273, 1998.
- [153] A. Patera Y. Maday. Spectral element methods for the navier–stokes equations. *In State of the Art Surveys in Computational Mechanics*, In State of the Art Surveys in Computational Mechanics:71–143, 1989.
- [154] E. M. Rønquist Y. Maday, A. T. Patera. An operator-integration-factor splitting method for time-dependent problems: application to incompressible fluid flow. *J. Sci. Comput.*, 5 (4):263–292., 1990.
- [155] A. Zebib. Stability of viscous flow past a circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 21:155–165, 1987.