



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO**  
**DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E STATISTICHE**

---

**DOTTORATO DI RICERCA IN**  
**INGEGNERIA ED ECONOMIA DELL'INNOVAZIONE**  
**XIV CICLO**

**TESI DI DOTTORATO IN:**

**RISK MANAGEMENT E VALUE AT RISK : L'INFLUENZA DEL PROFILO**  
**DELL'INVESTITORE NELL'OPERATIVITÀ DI CONSULENZA**

**COORDINATORE:**

**CH.MA PROF.SSA ALESSANDRA AMENDOLA**

**TUTOR :**

**CH.MA PROF.SSA ALESSANDRA AMENDOLA**

**CANDIDATO:**

**NICOLA SICA**

**ANNO ACCADEMICO 2016/2017**

## INDICE

Introduzione.....	2
 <b>Capitolo 1 : Un quadro di sintesi della modellistica di riferimento: il rischio di mercato e il Value at Risk (VaR).</b>	
Introduzione.....	4
1.1 Il Valore a Rischio (VaR): Identificazione e definizione del problema.....	7
1.2 Modelli GARCH e MGARCH: prefase ai metodi di stima del Var .....	12
1.3 I metodi di stima del VaR.....	15
1.3.1 Intervallo di confidenza per il VaR.....	22
1.4 Altri metodi di Stima.....	23
1.4.1 Le Simulazioni Storiche.....	26
1.4.2 Le Simulazioni MonteCarlo.....	34
1.5 Expected Smartfall.....	38
1.6 Valutazione della qualità delle stime del VaR: Il bcktesting.....	42
1.6.1 Test di Copertura.....	44
 <b>Capitolo 2 : Il rischio Credito: una disamina della modellistica di riferimento.</b>	
Introduzione.....	51
2.1 Modelli Strutturali.....	53
2.2 Modelli a Forma Ridotta.....	57
2.3 Modelli a Informazione Incompleta.....	60
2.4 Altri metodi di stima.....	63
2.4.1 I principali modelli per il rischio credito.....	69

### **Capitolo 3: Il profilo di rischio dell'investitore: la stima di un modello VaR**

Introduzione.....	83
3.1 Capacità di assumersi rischi finanziari.....	85
3.2 Tolleranza al rischio: Aspetti socio-demografici.....	87
3.2.1 Età anagrafica	
3.2.2 Reddito, occupazione e background risk.....	90
3.3 Aspetti personali.....	95
3.3.1 Titolo di studio come proxy della conoscenza Finanziaria	
3.3.2 Esperienza in ambito finanziario.....	97
3.4 Direttiva MiFID.....	99
3.4.1 Profilatura del cliente .....	100
3.4.2 Raccolta delle informazioni.....	102
3.4.3 Classificazione della clientela.....	104
3.4.4 Mappatura degli strumenti finanziari.....	106
3.4.5 Test di adeguatezza e appropriatezza.....	107
3.5 Criticità della profilatura MiFID.....	108
3.6 MiFID II.....	109
3.6.1 Principi e profili innovativi della MiFID II.....	110
3.7 Il VaR e la profilatura del cliente.....	111
Conclusioni.....	119
Bibliografia.....	121

## Introduzione

Gli Accordi di Basilea definiscono i requisiti patrimoniali delle banche. Tre sono i tipi di rischio sui quali si basa il calcolo di tale requisito: rischio operativo, cioè il rischio di perdite connesse alle potenziali inefficienze del sistema di controllo della banca, il rischio di mercato, cioè il rischio correlato alle eventuali perdite del portafoglio determinate dal mercato, e il rischio di credito, cioè il rischio in cui incorrono le banche per l'eventuale capacità parziale o totale della controparte ad assolvere l'obbligazione assunta.

I tre rischi definiti in seno all'accordo di Basilea, definiscono i tre capisaldi dell'attività di consulenza bancaria. Come consulente bancario, la principale responsabilità, risiede nella capacità di capire i rischi della posizione in acquisizione e sulla quale l'istituto andrà ad esporsi, valutarne l'accettabilità definendo le azioni opportune da intraprendere.

L'esigenza di misurare e controllare in modo adeguato i rischi assunti da una banca è particolarmente sentiti nell'attività di investimento e negoziazione di titoli, che risulta esposta alla volatilità dei prezzi delle attività scambiate. Per le istituzioni che assumono posizioni speculative in valute, obbligazioni o azioni, esiste infatti una concreta possibilità che le perdite associate a una singola posizione annullino, nell'arco di un breve intervallo temporale, i profitti realizzati nel corso di mesi.

Nella prima parte del lavoro di tesi viene analizzata la tipologia di rischio indicata con il termine "rischio di mercato". Più precisamente, con il termine rischio di mercato si intende il rischio di variazioni del valore di mercato di uno strumento o di un portafoglio di strumenti finanziari connesse a variazioni inattese delle condizioni di mercato. Uno degli indicatori maggiormente utilizzati per misurare il rischio di mercato di attivi e seguirlo nella sua evoluzione temporale è il VaR (Value at Risk) che può essere definito come la "*...perdita massima in cui un investitore potrà incorrere, con un prefissato livello di probabilità  $\alpha$ , ad un orizzonte temporale futuro  $N+h$* ". Se  $\zeta_N = (r_1 \dots r_n)$  sono le informazioni disponibili al tempo N, il VaR

sarà una funzione di  $\zeta_N$ ,  $\alpha$ ,  $h$  sintetizzando  $\text{VaR}_N(h; \alpha)$  con  $h=1,2,\dots$  ed  $0 < \alpha < 1$ . Il VaR è essenzialmente un indice sintetico che misura il rischio di mercato dell'attivo o del portafoglio di analisi.

I rischi finanziari si riferiscono a cambiamenti impreveduti e sfavorevoli del valore di mercato di determinate posizioni finanziarie poiché non è certo se l'emittente sarà in grado o meno di adempiere ai propri obblighi (cedolari o di capitale). Sulla medesima base concettuale si definisce il rischio di credito, inteso come rischio di inadempienza di controparte in un contratto finanziario di medio lungo periodo. Il secondo capitolo è dedicato all'analisi dei modelli per la valutazione del rischio di credito apparsi negli ultimi anni e utilizzati principalmente, finora, dagli istituti bancari. In letteratura sono stati sviluppati tre diversi approcci per descrivere il rischio credito: approccio strutturale, a forma ridotta e ad informazione incompleta.

Il terzo capitolo riprendendo quanto indicato nella prima parte della lavoro, si basa sulla disamina dei principi fondamentali della tutela del cliente in materia di consulenza all'investimento. Gli studi di finanza comportamentale che indagano sulle scelte di asset allocation finanziaria dimostrano che queste sono influenzate particolarmente da due elementi: la capacità di assumere rischi e l'attitudine al rischio degli investitori. Le imprese di investimento, grazie alla direttiva MiFID, hanno l'obbligo di profilare i clienti attraverso un questionario per garantire la loro tutela e protezione rispetto ai rischi derivanti dagli investimenti finanziari. Gli aspetti indagati dal questionari MiFID vengono messi a confronto con gli elementi che, secondo la letteratura, influenzano le scelte di investimento degli individui.

A conferma di quanto richiesto dalla direttiva MiFID, vengono estratti da un campione di clienti messi a disposizione da una Banca di Credito Cooperativo Campana, un rappresentante per ogni categoria di rischio sul cui portafoglio titoli viene applicato un modello VaR teso a verificare il grado di rischio correlato al portafoglio proposto a seguito dell'attività di consulenza effettuata.

# Capitolo I

## *Un quadro di sintesi della modellistica di riferimento: il rischio di mercato e il Value at Risk (VaR)*

### **Introduzione**

La stima e la previsione dei possibili livelli di volatilità di un attivo, o un portafoglio di attivi, forniscono informazioni sulla struttura del loro rischio di mercato. Gli strumenti analitico-statistici possono essere utilizzati per implementare una valutazione futura di rischio in modo da poterlo, fra l'altro, confrontare nel tempo e nello spazio. Nell'evoluzione dei prezzi di attivi un'attenzione particolare è rivolta agli eventi rari ed alla stima della probabilità del loro verificarsi. L'attenzione per la costruzione di indici sintetici che siano in grado di misurare la rischiosità di un attivo o di un portafoglio di attivi è fortemente correlata al possibile presentarsi di eventi rari che, per definizione, cadono nelle code delle distribuzioni di probabilità che le caratterizzano. In tale ambito l'attenzione degli analisti e degli operatori è particolarmente interessata alla coda sinistra dato che, per un detentore di attivi, in questa si situano gli eventi avversi, quelli che sono connessi con le possibili perdite di mercato. In generale, gli indici che misurano la rischiosità di attivi sono anche utilizzati per classificare, da parte di Agenzie specializzate, gli attivi stessi ed attribuire a questi un rating di affidabilità (basso, medio, alto) che varia nel tempo. Il rating fornisce agli investitori, ed agli operatori di mercato in generale, una informazione sulla probabilità che quell'attivo o mercato ha di incorrere in eventi rari avversi.

Questi rating vengono anche utilizzati dalle istituzioni finanziarie per stabilire se e a quale tasso di interesse fornire capitali alle società ed alle istituzioni emittenti attivi finanziari o monetari. Uno degli indicatori maggiormente utilizzati per misurare il rischio di mercato di attivi e seguirlo nella sua evoluzione temporale è il VaR (Value at Risk) che può essere definito come la “...perdita massima in cui un investitore potrà incorrere, con un prefissato livello di probabilità  $\alpha$ , ad un orizzonte temporale futuro  $N+h$ ”. Se  $\zeta_N = (r_1 \dots r_n)$  sono le informazioni disponibili al tempo N, il VaR sarà una funzione di  $\zeta_N$ ,  $\alpha$ ,  $h$  sintetizzando  $\text{VaR}_N(h; \alpha)$  con  $h=1,2,\dots$  ed  $0 < \alpha < 1$ . Il VaR è essenzialmente un indice sintetico che misura il rischio di mercato dell’attivo o del portafoglio di analisi. Come già accennato, questa misura del rischio può essere utilizzata da istituzioni finanziarie e monetarie, oppure da singoli operatori ed investitori per valutare il rischio di mercato di attivi, ma viene anche utilizzato per fissare regole ben definite sul tipo, la qualità e la quantità delle operazioni possibili. L’uso corretto delle informazioni che fornisce il VaR permette anche alle istituzioni finanziarie di poter continuare ad operare pure dopo che un evento raro avverso si è verificato in quel mercato. L’allentamento dei vincoli di mercato e la non curanza degli allarmi sul rischio connesso, segnalati dal crescere abnorme del VaR degli attivi e dei mercati finanziari di tutto il mondo, hanno fatto sì che, dalla crisi finanziaria iniziata nella tarda primavera del 2007, si è incominciato a prenderne coscienza solo un anno dopo quando gli effetti si erano già riversati sull’economia reale devastandola. Da tali eventi viene a generarsi l’esigenza di misurare controllare in modo adeguato i rischi assunti da un istituto bancario, particolarmente sentita nell’attività di investimento e negoziazione di titoli, che risulta esposta alla volatilità dei prezzi delle attività scambiate. Per le istituzioni che assumono posizioni speculative in valute, obbligazioni o azioni, esiste infatti una concreta possibilità che le perdite associate a una singola posizione annullino, nell’arco di un breve intervallo temporale, i profitti realizzati nel corso di mesi. Questo tipo di rischi viene generalmente indicato con il termine “rischio di mercato”, inteso come quel complesso di variazioni del valore di mercato di uno strumento o di un portafoglio di

strumenti finanziari connessi a variazioni inattese delle condizioni di mercato. I rischi di mercato sono venuti assumendo, nell'ambito dei mercati finanziari internazionali una rilevanza crescente nel corso dell'ultimo decennio a seguito di tre fenomeni. Il primo connesso al processo di securitization che ha portato alla progressiva sostituzione di attività illiquide (finanziamenti, mutui) con attività dotate di un mercato secondario liquido e dunque di un prezzo. Tale processo ha favorito la diffusione di criteri di misurazione al valore di mercato (mark-to-market) delle attività detenute dagli intermediari finanziari. Il secondo fenomeno è rappresentato dalla progressiva crescita del mercato degli strumenti finanziari derivati, il cui principale profilo di rischio per gli intermediari finanziari che li negoziano è appunto rappresentato dalla variazione del relativo valore di mercato causata da variazioni dei prezzi delle attività sottostanti e/o dalle condizioni di volatilità degli stessi. Il terzo fenomeno è legato alla crescente diffusione di nuovi standard contabili (IFRS39) che prevedono l'iscrizione in bilancio del valore di mercato per una vasta gamma di attività e passività finanziarie. Tali standard, che comportano l'immediata evidenziazione dei profitti e delle perdite connessi alle variazioni di breve periodo delle condizioni di mercato, hanno contribuito a render maggiormente visibili gli effetti del rischio di mercato, accentuandone l'importanza. Metodologicamente, la misurazione e gestione di rischio di mercato si è basata sui valori nominali delle singole posizioni. L'esposizione al rischio veniva considerata direttamente proporzionale al valore nominale degli strumenti finanziari detenuti, e anche eventuali limiti imposti alla capacità di risk-taking delle singole unità operative venivano espressi in riferimento al valore nominale delle posizioni. Tale approccio risulta apprezzabile per la semplicità, il costo ridotto e lo scarso fabbisogno di informazioni e aggiornamenti; tuttavia esso è contraddistinto da numerosi limiti. Di maggiore rilevanza risulta la mancata considerazione delle condizioni di volatilità e di correlazione dei prezzi/ tassi di mercato. Infatti, le posizioni sensibili a fattori di mercato caratterizzati da una maggiore volatilità sono, a parità di valore nominale più rischiose. Inoltre, portafogli composti da posizioni sensibili a fattori di mercato fortemente correlati tra

loro sono, a parità di valore nominale, caratterizzati da un maggior rischio. L'inadeguatezza del metodo basato sui valori nominali è emersa in modo rilevante a seguito del crescente coinvolgimento delle principali istituzioni finanziarie internazionali nell'attività di trading di opzioni. Le opzioni presentano infatti valori di mercato particolarmente volatili; tale volatilità, inoltre è sensibilmente diversa a seconda che il prezzo dell'attività sottostante sia prossimo o meno al prezzo di esercizio. Simili problemi hanno condotto a utilizzare misure di rischio specifiche per le diverse tipologie di posizioni: la duration e il basis point value per i titoli obbligazionari, o con il beta per il titolo azionario. Con questa metodologia si ovviava il valore della volatilità e di correlazione dei fattori di rischio, a tal riguardo nasce e viene sviluppato per internalizzare tali limiti lo strumento del VaR.

### 1.1 Il Valore a Rischio (VaR) : Identificazione e definizione del problema

Il VaR<sup>1</sup> è definito in un contesto probabilistico ed è connesso al verificarsi di eventi rari avversi che si situano nella coda sinistra della funzione di densità dei rendimenti. In termini statistici il VaR non è altro che un percentile della distribuzione di probabilità dei rendimenti attesi  $h$  tempi in avanti. Più precisamente dato il processo stocastico dei rendimenti  $r_t$ , stazionario, riferito ai prezzi  $P_t$  di un attivo o di un portafoglio di attivi, siano  $\zeta_{t-1}$  le informazioni disponibili su  $r_t$  al tempo  $t-1$ , indichiamo con  $F(r | \zeta_{t-1})$  la distribuzione di ripartizione di  $r_t$  condizionata alle informazioni  $\zeta_{t-1}$ . Fissato il livello di probabilità  $\alpha$  esiste un unico valore, diciamo  $r_{(\alpha)}$  per cui vale la seguente uguaglianza

$$F^{-1}(r_{(\alpha)} | \zeta_{t-1}) = \alpha$$

---

<sup>1</sup> Jordan J.V., Mackay R.J. (1996) Assessing Value at Risk for Equity Portfolios: Implementing Alternative Technique in Beckstorm H.C. Fabozzi F. (a cura di) *Handbook of Firmwide Risk Management*.

La  $F^{-1} = (r_{(\alpha)} | \zeta_{t-1}) = \alpha$  permette di definire analiticamente il VaR calcolato al tempo  $t-1$  con un orizzonte temporale  $h=1$  ed al livello di probabilità  $\alpha$  come:

$$\text{VaR}_{t-1}(1; \alpha) = r_{(\alpha)}$$

La grande diffusione che ha avuto questo indice sintetico fra gli operatori ed utilizzatori è dovuta a due fattori:

1. La sua semplice ed immediata interpretazione: misura la perdita massima in cui si può incorrere con probabilità non superiore ad  $\alpha$  prevista al tempo  $t$  con le informazioni disponibili al tempo precedente  $t-1$ ;
2. Gli Accordi di Basilea sulla vigilanza bancaria che hanno imposto agli operatori finanziari monetari la valutazione del rischio di mercato calcolando, fra l'altro, proprio il VaR fino ad un massimo di  $M=10$  giorni.

In ogni caso il VaR è un indice di valutazione e previsione del rischio di mercato di brevissimo periodo e pertanto non è in grado di prevedere crisi generalizzate e di medio – lungo periodo. D'altro lato, misure alternative al VaR che sono coerenti con i postulati di Artzner<sup>2</sup>, sono comunque funzioni

<sup>2</sup> Artzner et al. hanno dimostrato formalmente come il VaR produca risultati che contrastano le ragionevoli aspettative di quanto soffre di un problema di coerenza: nel loro celebre studio definiscono la coerenza come la caratteristica propria di quelle misure di rischio che rispettano i seguenti assiomi intuitivi ( $\Gamma$  rappresenta una generica misura di rischio):

- Omogeneità positiva: Data un'attività il cui rendimento è definito dalla variabile aleatoria  $A$  e un numero reale non negativo  $\varphi$  deve accadere che:  $\Gamma(\varphi A) = \varphi \Gamma(A)$ , ovvero si richiede che un aumento del capitale investito in un'attività finanziaria generi un aumento del capitale investito in un'attività finanziaria generi un aumento della misura di rischio proporzionale al capitale stesso.
- Subadditività. Dati due rendimenti  $A$  e  $B$ , l'assioma richiede che venga rispettata la relazione:  $\Gamma(A+B) \leq \Gamma(A) + \Gamma(B)$ , cioè il rischio relativo alla posizione complessiva deve essere inferiore o al più uguale alla somma dei rischi delle singole posizioni.
- Invarianza transazionale: Dati un rendimento rischioso  $A$ , uno non rischioso  $R$  e un numero reale non negativo  $\varphi$   $\Gamma(A+\varphi R) \leq \Gamma(A) - \varphi$ , il che significa che la quota di capitale investita nell'attività a rendimento certo va a ridurre il rischio della posizione sul titolo rischioso.
- Monotonicità: Dati due rendimenti  $A$  e  $B$  tali per cui  $B > A$  per ogni realizzazione delle due variabili casuali, deve essere verificata:  $\Gamma(B) \leq \Gamma(A)$  tale assioma risulta apparentemente contrastare un basilare postulato della finanza per cui a titoli maggiormente

di percentili. Inoltre, sotto l'ipotesi che i rendimenti si distribuiscono come una Normale o una T di Student, il VaR soddisfa quei postulati e pertanto risulta coerente. I percentili, come gli ordinamenti statistici, sono statistiche non regolari, e la loro stima implica rilevanti problemi di approssimazione anche con dati i.i.d.<sup>3</sup>. In generale, è noto, che se  $X$  ha funzione di ripartizione  $F(x)$  con funzione di densità  $f(x)$  continua, dato il campione iid  $(x_1, \dots, x_n)$  estratto da  $X$ , se indichiamo con  $f_N(x)$  la funzione di ripartizione empirica ottenuta sulla base del campione:

$$f_N(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < x(1) \\ 1/N, & \text{per } x \leq x < x(2) \\ \dots \dots \dots \\ 1 & \text{per } x \geq x(n) \end{cases}$$

dove  $(x_1, \dots, x_n)$  è il campione osservato ordinato in senso non decrescente (*ordinamento statistico*) risulta

$$f_N(x) \xrightarrow{p} F(x)$$

Inoltre, se  $x_{(\alpha)(\text{teorico})}$  è il percentile di ordine  $\alpha$  di  $X$  calcolato<sup>4</sup> su  $F(x)$  mentre  $x_{(\alpha)(\text{stimato})}$  è quello calcolato su  $f_N(x)$ , se  $x_{(\alpha)}$  è unico risulta :

$$\sqrt{N} (\hat{x}_{(\alpha)} - x_{(\alpha)}) \xrightarrow{L} N(0; \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2 x_{(\alpha)}}), \quad 0 < \alpha < 1$$

e pertanto l'errore di stima di  $x_{(\alpha)}$  con  $\hat{x}_{(\alpha)}$  è asintoticamente normale e dell'ordine  $O(N^{-1/2})$  cioè tende a zero con  $\sqrt{N}$ . Nell'immagine seguente è

redditizi viene associato maggiore rischio; questo, tuttavia, vale solamente per i mercati privi di possibilità di arbitraggio . Se viene verificata la relazione di cui sopra, date le premesse, significa che si possono effettuare degli arbitraggi vendendo allo scoperto il titolo A ed acquistato B sul mercato: il profitto privo di rischio sarà pari alla differenza tra i rendimenti delle due attività. Una misura di rischio "adeguata" dunque, deve segnalare un arbitraggio attribuendo al titolo A maggiore rischio. Il calcolo del VaR di un portafoglio non dà alcuna informazione circa le perdite che si trovano alla sinistra del VaR stesso: si tratta di perdite che hanno modesta probabilità di realizzo, ma che possono raggiungere considerevoli entità.  
<sup>3</sup> Nella teoria della probabilità, una sequenza di variabili casuali è detta indipendente e identicamente distribuita (i.i.d.) se: le variabili hanno tutte la stessa distribuzione di probabilità; le variabili sono tutte statisticamente indipendenti.

<sup>4</sup> Lopez J.A. (1999) Methods for Evaluation Value at Risk Estimates, *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, 2.

riportato schematicamente il percentile teorico  $x_{(\alpha)(\text{teorico})}$  calcolato su  $F(x)$  che stacca alla sua sinistra l' $\alpha$  per cento di probabilità e il corrispondente empirico campionario  $\hat{x}_{(\alpha)}$  calcolato su  $F_N(x)$  con  $N=200$

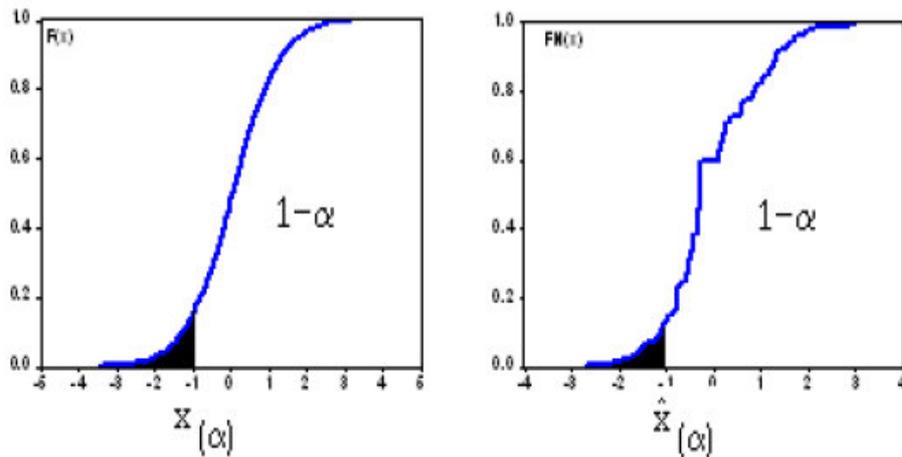


Fig.1.1 – Esempio di percentile teorico  $F(x)$  e quello empirico  $f_n(x)$

Inoltre<sup>5</sup>, date le osservazioni supporte i.i.d , per la relativa distribuzione empirica si ha che  $F_t(x) \stackrel{i.i.d}{\sim} U(0,1)$  ed equivalentemente  $Z_t = \Phi^{-1}(F_t(x)) \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0,1)$  dove  $U(0,1)$  è la v.c. uniforme distribuita nell'intervallo  $(0,1)$  e  $\Phi(\cdot)$  la funzione di ripartizione della Normale standardizzata. Per  $N$  finito e prefissato l'ordine di approssimazione è tanto peggiore quanto più alla probabilità  $\alpha$  è vicina ai suoi estremi: zero ed uno. In generale, la distorsione della stima, a parità di altre condizioni, è positiva e cresce al decrescere di  $\alpha$  ed al crescere delle “pesantezza” delle code della funzione di densità  $f(x)$ . Gli aspetti negativi della stima di  $x_{(\alpha)}$  sono propri del VaR dato che è calcolato per valori piccoli di  $\alpha$ , di solito per  $\alpha = 0.05$  oppure  $\alpha = 0.01$  e per distribuzioni con code pesanti.<sup>6</sup> In pratica i rendimenti di un attivo o di un portafoglio sono lontani dal caso i.i.d, ma se si conosce la media condizionata

<sup>5</sup> Piccolo D, Vitale CD (1984) Metodi Statistici per l'Analisi Economica, *Il Mulino*, Bologna.

<sup>6</sup> Barone – Adesi G., Giannopoulos K. (1996), A Simplified Approach to the Conditional Estimation of Value at Risk, *Futures and Options World*, October, pp 68-72.

prevista  $E(r_{N+1} | \zeta_N)$  e la varianza condizionata prevista  $\text{Var}(r_{N+1} | \zeta_N)$  è plausibile supporre che il processo condizionato

$$(a_{N+1} | \zeta_N) = \frac{(r_{N+1} | \zeta_N) - E(r_{N+1} | \zeta_N)}{[\text{VaR}(r_{N+1} | \zeta_N)]^{1/2}}$$

sia, praticamente, iid<sup>7</sup> e pertanto è possibile ottenere il VaR al tempo N, con livello di probabilità  $\alpha$  e ad un orizzonte temporale N+1 come :

$$\text{VaR}_n(1; \alpha) = E(r_{N+1} | \zeta_N) + a_{(\alpha)} [\text{VaR}(r_{N+1} | \zeta_N)]^{1/2} = r_N(1) + a_{(\alpha)} \sigma_N(1)$$

ove  $a_{(\alpha)} = F_a^{-1}(\alpha)$  è il percentile di ordine  $(\alpha)$  del processo stocastico condizionato e standardizzato  $a_t$  con distribuzione di probabilità  $F_a(x)$ .

## 1.2 Modelli GARCH e MGARCH: prefase ai metodi di stima del Var

Il modello GARCH fu introdotto da Bollerslev<sup>8</sup> (1986). Egli definì la sua nuova classe di modelli per l'analisi delle serie storiche finanziarie con il termine GARCH, che sta per *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Model*, in quanto essi rappresentano una generalizzazione dei modelli ARCH introdotti da Engle nel 1982.

Il modello GARCH (p,q) è tale per cui la varianza condizionata al tempo  $t$  viene espressa attraverso una combinazione lineare di  $q$  ritardi al quadrato,  $\varepsilon_t^2$ , rappresentativi delle news di mercato e della capacità di variazione nel tempo della varianza condizionata.

Il GARCH (p,q) può essere definito come segue:

---

<sup>7</sup> Hull J., White A. (1998), Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed, *Journal of Derivates*, 5, pp.9-19.

<sup>8</sup> Bollorslev T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327

$$\varepsilon_t = \sigma_t v_t \quad \sigma_t^2 = \omega + \sum_{t=1}^p \alpha_t \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{j-1}^2$$

dove  $\alpha_t$  costituiscono i termini ARCH, mentre i  $\beta_j$  rappresentano i termini GARCH del modello. Inoltre le  $v_t$  sono le componenti casuali i.i.d a media nulla e varianza unitaria.

I parametri sia del modello ARCH che di quello GARCH devono soddisfare alcune condizioni di regolarità.

In particolare, se si ha che

$$v_t | I_{t-1} \sim N(0,1), \text{ allora } \varepsilon_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2),$$

vale a dire che, condizionatamente al contenuto informativo in t-1 l'innovazione è una variabile casuale normale con media nulla e varianza che dipende dal tempo. Pertanto, al variare di t, si realizzeranno distribuzioni di probabilità normale di tipo diverso, più o meno disperse rispetto al loro centro di simmetria. Formalmente, quindi la varianza condizionata dei rendimenti risulta pari a

$$\sigma_t^2 = \text{Var}(r_t | I_{t-1}) = E(r_t | I_{t-1}) | I_{t-1}^2 = E(\varepsilon_t^2 | I_{t-1})$$

Dalla struttura dei due modelli è facile notare che valori passati alti del quadrato degli shocks implicano valori alti della varianza condizionata. Questo sta ad indicare che, secondo il modello ARCH, la probabilità che si realizzi, dopo un grande shock, un altro shock importante è maggiore della probabilità che si realizzi invece uno shock più limitato in intensità. Mentre per il modello GARCH, la probabilità che dopo un periodo ad alta volatilità si realizzi un nuovo periodo ad alta volatilità è maggiore della probabilità che se ne realizzi uno a bassa volatilità.

Sotto l'ipotesi di normalità della distribuzione condizionata, la funzione di verosimiglianza è data:

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p | \omega, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) * \prod_{t=p+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

Per ottenere la stima dei parametri si va a massimizzare la funzione di verosimiglianza condizionata oppure la funzione di log-verosimiglianza condizionata pari a:

$$f(\epsilon_{p+1}, \epsilon_T | \omega, \alpha_0, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \epsilon_1, \dots, \epsilon_p) * \prod_{t=p+1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

$$f(\epsilon_{p+1}, \epsilon_T | \omega, \alpha_0, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \epsilon_1, \dots, \epsilon_p) * \sum_{t=p+1}^T -\frac{1}{2} \ln(2\pi) \\ - 1/2 \ln(\sigma_t^2) - 1/2 \frac{\epsilon_t^2}{2\sigma_t^2}$$

Ovviamente nella specificazione completa  $\sigma_t^2$  è quello definito dal modello GARCH (p,q), vale a dire  $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$ .

A questo punto la procedura di stima prevede :

$$\max_{\theta} \{l(\theta)\} = \max_{\theta} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} \right\}$$

Alla rappresentazione univariata dei modelli GARCH, verso la fine degli anni Ottanta Bollerslev<sup>9</sup>, Engle<sup>10</sup> e Woodridge e la prima metà degli anni Novanta vengono introdotti i modelli MGARCH (*Multivariate GARCH*). In particolare all'inizio degli anni Novante Bollerslev propose il CCC, ovvero *Constant Conditional Correlation Model*. Esso è un particolare modello MGARCH che viene però scomposto in diversi GARCH univariati incorrelati, in modo tale da renderlo più parsimonioso dal punto di vista

---

<sup>9</sup> Bollerslev T. (2007), Glossary to ARCH (GARCH), *Duke University and NBER*, <http://www.faculty.chicagobooth.edu/>.

<sup>10</sup> Engle R.F. (2009), *Anticipating Correlation, A new Paradigm for Risk Management*, Princeton University Press.

parametrico e quindi di renderlo di più facile implementazione. Il modello CCC rappresenta il modello più implementabile se ad essere analizzata è una serie multivariata con ampio numero di componenti. Esso, infatti, ha una funzione di verosimiglianza ben definita e può essere facilmente stimato in due soli passi (stima della parte univariata (1); valutazione della correlazione (2)). Le stime che otteniamo, tuttavia, sono incomplete per il fatto che non sappiamo nulla in merito ad eventuali cambiamenti nella correlazione tra le componenti, poiché assumiamo che essa sia costante. Questa limitazione ha fatto sì che il modello risultasse in molte situazioni inadeguato in ambito reale. Nel 2002 Engle, introdusse il *Dynamic Conditional Correlation Model* (DCC), nato sulla base dei forti limiti del CCC e come sua generalizzazione. A differenza di quest'ultimo, il DCC non richiede che la correlazione sia costante nel tempo ma la ammette dinamica. Esso modella in modo separato volatilità e correlazione delle variabili osservate. Il modello DCC prevede una modellazione GARCH per le correlazioni di ciascuna componente finanziaria di portafoglio, inoltre, la correlazione condizionata del DCC risulta essere dinamica, ma con dinamica costante per ciascuna componente.

Per ottenere la stima dei parametri in MGARCH <sup>11</sup> bisogna, come per il caso precedente, massimizzare la funzione di verosimiglianza sotto l'assunzione di indipendenza ed identica distribuzione delle innovazioni standardizzate  $v_t$ . Inoltre è necessario fare un'altra assunzione sul processo generatore della componente erratica del modello. E' necessario, infatti, definire una funzione di densità  $v_t$ , indicata come  $g(v_t|\eta)$  per le  $n$  osservazioni rispetto al vettore  $\zeta$  dei parametri, indicando anche dei valori di partenza per la procedura di stima di  $\mu_0$  e  $\Sigma_0$ . Quindi si va a

$$\max_{\zeta} L_n(\zeta) = \sum_{t=1}^n \log f(y_t|\zeta, I_{t-1})$$

---

<sup>11</sup> Bauwens L., Laurent S., Rombouts V. K. J. (2006), Multivariate GARCH Models: a Survey, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.21, pp.79-109.

La distribuzione più usata è la distribuzione normale multivariata. In questo caso la funzione di log-verosimiglianza risulta

$$\begin{aligned} \ln L(\theta; \epsilon_1, \dots, \epsilon_n) &= -\frac{1}{2} \left[ nm \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^n \ln |\Sigma_t| + \sum_{t=1}^n \epsilon_t' \Sigma_t^{-1} \epsilon_t \right] \\ &= -\frac{1}{2} n \cdot m \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \ln |\Sigma_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \epsilon_t' \Sigma_t^{-1} \epsilon_t \end{aligned}$$

dove  $|\Sigma_t|$  rappresenta il determinante della matrice  $\Sigma_t$ . Come per i modelli GARCH univariati, le stime dei parametri sono stime di verosimiglianza, ottenute attraverso la massimizzazione della funzione verosimiglianza.

### 1.3 Metodi di Stima del VaR

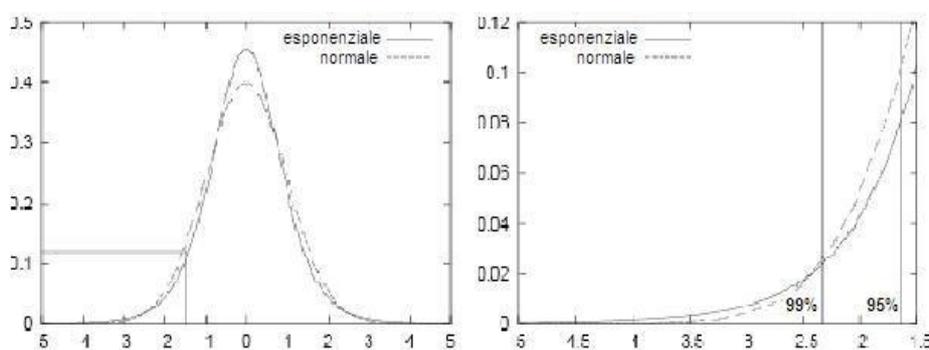
A fronte della definizione di rischio esistono numerosi e diversi metodi di misurazione del VaR<sup>12</sup>. In particolare in letteratura, possiamo distinguere tre principali categorie di modelli di stima del rischio di mercato:

---

<sup>12</sup> Viene sviluppato da J.P.Morgan e si basa sul concetto di VaR e sull'ipotesi di una distribuzione gaussiana dei rendimenti (usa un metodo parametrico per calcolare il valore del rischio); fra i suoi punti di forza c'è la sua capacità di tenere conto del volatility clustering, ovvero della tendenza a raggrupparsi dei periodi ad alta, o bassa, volatilità dei mercati. I problemi dello strumento però sono notevoli, iniziando dall'attendibilità delle stime del rischio per periodi lunghi, anche solo superiori ad una contrattazione. Il problema di gran lunga più critico però è la discutibile capacità di stimare il rischio in generale: ovvero sappiamo che le stime vengono fornite per il 95% delle possibili fluttuazioni dei prezzi (nonsolo, il RiskMetrics definisce "il rischio" come il VaR con livello di probabilità al 95%), lasciandoci scoperti per il restante 5%, quello delle grandi variazioni disposte nelle code della distribuzione. La soluzione però è la stessa soglia del 95% che, se da un lato è un limite alla precisione del metodo, dall'altro, rappresentando la parte centrale del grafico dove una distribuzione non-gaussiana differisce poco dalla gaussiana, è anche la spiegazione del perché il metodo fornisca comunque stime ritenute accettabili. Bisogna comunque non dimenticare che nel momento in cui ci si aspetta un livello di accuratezza nella quantificazione del rischio del 99%, l'effetto delle code non-gaussiane diventa più rilevante:

- Modelli analitici o parametrici o modelli di varianza – covarianza;
- Modelli di simulazione o modelli non parametrici: simulazioni STORICHE (HS), simulazioni Monte Carlo (MC) e le prove di stress;
- i modelli basati sulla Extreme Value Theory (EVT), Teoria dei Valori o Eventi Estremi (modelli semiparametrici)

La caratteristica principale del VaR secondo Riskmetrics è la sua estrema semplicità di calcolo, dove condizioni di difficoltà emergono nel caso di orizzonti temporali  $h > 1$ . La derivazione del VaR con la procedura RiskMetrics<sup>13</sup> è molto semplice sì, ma anche molto approssimativa. Se si vuole un valore del VaR più consono alle volatilità di mercato, è necessario una metodologia più flessibile, ma allo stesso tempo più complessa. Un metodo è quello del calcolo del VaR<sup>14</sup> quando ai rendimenti è adottato un modello ARMA (p,q) – GARCH (s,v) :



in figura si vede come la coda gaussiana nella parte terminale del grafico giaccia sotto a quella esponenziale col risultato di sottovalutare il rischio il cui andamento è più correttamente rappresentato dalla coda esponenziale. In questo caso il risultato è quello di compromettere le stime fornite e rendendole abbastanza inutili.

<sup>14</sup> Berkowitz J. (2001), Testing Density Forecast, Applications to Risk Management. *Journal of Business and Economic Statistics*, 19, pp. 465-474.

- $\phi(B)r_t = \phi_0 + \Theta(B)\varepsilon_t$
- $\varepsilon_t = \sigma_t a_t$  dove  $a_t \stackrel{i.i.d}{\sim} (0,1)$
- $\alpha(B)\sigma_t^2 = w + \beta(B)\varepsilon_t^2$

dove si è posto

$$\phi(B) = 1 - \phi_1(B) - \dots - \phi_p(B)^p$$

$$\Theta(B) = 1 - \Theta_1(B) - \dots - \Theta_q(B)^q$$

$$\alpha(B) = 1 - \alpha_1(B) - \dots - \alpha_s(B)^s$$

$$\beta(B) = \beta_1(B) + \dots + \beta_v(B)^v$$

Sotto le usuali ipotesi di stazionarietà, invertibilità ed esistenza dei processi stocastici coinvolti, si ha ancora  $r_N[h] = \sum_{j=1}^h r_N(j)$  con  $r_N(j)$  il previsore di  $r_{N+j}$ . Per il previsore di  $\sigma_{N+[h]}^2$  risulta

$$\begin{aligned} \sigma_{N+[h]}^2 &= \text{VaR}(r_{N+[h]}|\mathfrak{F}_N) = \text{VaR}(\sum_{j=1}^h e_N(j)|\mathfrak{F}_N) \\ &= \sigma_{N[h]}^2 + (1 + \psi_1)^2 + \sigma_N^2(h-1) + (1 + \psi_1 + \psi_2)^2 \\ &\quad + \sigma_N^2(h-2) + \dots + \left(\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j\right) \sigma_N^2(1) \\ &= \sum_{j=0}^{h-1} \sigma_N^2(h-j) \left(\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j\right)^2 \end{aligned}$$

ove si è posto

$$e_N(j) = r_{N+j} - r_N(j) = \sum_{i=0}^{h-1} \psi_i \varepsilon_{N+j-i}$$

$$\psi_0 = 1$$

$$1 + \psi_1(B) + \psi_2(B)^2 + \psi_3(B)^3 + \dots = \frac{\Theta(B)}{\phi(B)}$$

Da cui il  $VaR = r_N[h] + a_{(\alpha)}\sigma_N[h]$  con  $a_{(\alpha)}$  l'  $\alpha$  – esimo percentile della distribuzione di  $a_{(t)}$ . In generale  $\sigma_N[h]$  non ammette una espressione esplicita, se si escludono casi particolari in cui si riesce facilmente a derivare una espressione dai pesi  $\psi_1$  ed il suo calcolo viene fatto con metodi numerici o con approssimazioni.<sup>15</sup> In alcuni casi particolari, di rilevanza pratica, che ammettono una formula esplicita per i pesi  $\psi_1$  e quindi per  $\sigma_N[h]$ . Ponendo i rendimenti

$$\begin{aligned} r_t &= \mu + \varepsilon_t \quad e \quad \sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad \text{implica che} \\ r_N(j) &= \mu \\ r_N(h) &= h\mu \\ \psi_j &= 0 \quad \text{con } j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$\sigma_N^2[h] = \sum_{j=1}^h \sigma_N^2(j) \quad \text{con } h = 1, 2, \dots$$

Da tali condizioni, vengono stimati i parametri  $(\mu, \alpha, \beta)$ , al fine di ottenere la seguente stima

$$\begin{aligned} VaR_N(h; \alpha) &= \begin{cases} \bar{r} + a_{(\alpha)}(\hat{w} + \hat{\alpha}\varepsilon_N^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_N^2)^{\frac{1}{2}} & \text{per } h = 1 \\ h\bar{r} + a_{(\alpha)}(h\hat{w} + \hat{\alpha}\varepsilon_N^2 + \hat{\beta}\hat{\sigma}_N^2 + (\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \sum_{j=1}^{h-1} \hat{\sigma}_N^2(j))^{\frac{1}{2}} & \text{per } h > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Passando ad un ipotesi di modello MA (1) – GARCH (1,1) si suppone che il modello che adatta i rendimenti sia dato :  $r_t = \mu + \varepsilon_t$  ;  $\sigma_t^2 = w + \alpha\varepsilon_t^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$  da cui deriva

$$r_{N+[H]} = h\mu - \theta\varepsilon_N + (1 - \theta) \sum_{j=1}^{h-1} \varepsilon_{N+j} + \varepsilon_{N+h} \quad \text{e quindi}$$

---

<sup>15</sup> Beder T.S. (1995), VaR: Seductive but Dangerous ,*Financial Analyst Journal*, September – October, pp 12-24.

$r_N[h] = E(r_{N+[h]}|\mathfrak{I}_N) = h\mu - \Theta\varepsilon$  con  $h = 1, 2, \dots$  il che implica

$$\sum_{j=1}^h \varepsilon_N(j) = r_{N+[h]} - r_{N[h]} = \varepsilon_{N+h} + (1 - \Theta) \sum_{j=1}^{h-1} \varepsilon_{N+j}$$

da cui si ottiene  $\hat{\sigma}_N^2[h] = \text{VaR}(r_{N+[h]}|\mathfrak{I}_N) = \sigma_N^2(h) + (1 - \Theta) \sum_{j=1}^{h-1} \sigma_N^2(j)$  con  $h = 1, 2, \dots$ . Necessario al calcolo del VaR è la stima del percentile a  $(\alpha)$ , uno dei modi per calcolare il VaR è supporre che il processo standardizzato  $a_t \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$  sia iid e Normale, in queste condizioni risulta :

- $\text{VaR}_N(h; 0.05) = \hat{r}[h] - 1.645\hat{\sigma}[h]$
- $\text{VaR}_N(h; 0.01) = \hat{r}[h] - 2.330\hat{\sigma}[h]$

D'altra parte, per poter correttamente applicare questa procedura è necessario verificare statisticamente che l'ipotesi di normalità sia accettabile. Infatti, molto spesso, pur essendo accettabile l'ipotesi che il processo  $a_t$  sia simmetrico, standardizzato ed i.i.d, non lo è quella di normalità visto che  $a_t$  possiede code molto più "pesanti" di quelle di una normale standardizzata e molto più simili a quelle di una  $t$  di Student. Per verificare che il processo dei residui  $a_t$  sia normale si utilizzano, dati i residui stimati dal modello ARMA-GARCH o sue varianti, ad esempio due strumenti<sup>16</sup> quali

- Test di Jarque-Bera per  $a_t$
- il grafico Q-Qplot per  $\hat{a}_t$

Per quel che riguarda l'ipotesi di indipendenza<sup>17</sup> di  $a_t$  questa viene verificata costruendo i correlogrammi di  $\hat{a}_t$  e di  $\hat{a}_t^2$  e verificando che le relative autocorrelazioni cadono tutte nell'intervallo di confidenza asintotico

---

<sup>16</sup> Bera, Anil K.; Carlos M. Jarque (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Economics Letters* 6 (3): 255–259.

Jarque, C. M. & Bera, A. K. (1987), A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review* 55, 163–172.

<sup>17</sup> Dowd e Blake (2006), After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance *Applications of Quantile-Based Risk Measures*

al 95% dato da  $[-2/\sqrt{N} ; 2/\sqrt{N}]$ . Una alternativa più plausibile all'ipotesi di normalità per  $a_t$  è quella di supporre che sia proporzionale ad una v.c.  $t$  di Student con  $g > 4$  gradi di libertà. Ricordando che per una v.c.  $t_{(g)}$  è  $E(t_{(g)}) = 0$  e  $VaR(t_{(g)}) = g / (g - 2)$  deve essere  $a_t = ((g - 2) / g)^{1/2} t_{(g)}$  e in tal modo

$$- \quad VaR(h; \alpha) = r_N[h] + ((g - 2) / g)^{1/2} t_{(g; \alpha)} \sigma_N[h]$$

dove  $t_{(g; \alpha)}$  è l' $\alpha$ -simo percentile calcolato sulla v.c.  $t$  di Student con  $g$  gradi di libertà. Il parametro  $g$  deve essere esso stesso stimato dai dati. La stima di  $g$  può essere fatta con il metodo della massima verosimiglianza congiuntamente alla stima dei parametri del modello ARMA-GARCH o sue varianti, oppure successivamente utilizzando l'indice di curtosi stimato da  $\hat{a}_t$  tenendo conto che per una v.c.  $t_{(g)}$  risulta  $\gamma_2 = 6 / (g - 4)$  da cui si ottiene la stima, con il metodo dei momenti  $\hat{g} = 4 + 6 / \hat{\gamma}_2$ . In particolare, se è  $g=5$  sostituendo in  $VaR(h; \alpha) = r_N[h] + ((g - 2) / g)^{1/2} t_{(g; \alpha)} \sigma_N[h]$  si ha

$$- \quad (3/5)^{1/2} t_{(5; 0.05)} = - 1.561, \text{ se si è posto con } \alpha = 0.05;$$

$$- \quad (3/5)^{1/2} t_{(5; 0.01)} = - 2.606, \text{ se si è posto con } \alpha = 0.01;$$

che sostituiti nel precedente sistema di calcolo del Var, permette di ottenerlo sotto ipotesi di residui standardizzati considerati come  $t$  di Studenti con  $g = 5$  gradi di libertà :

$$- \quad VaR_N(h; 0.05) = \hat{r}[h] - 1.561 \hat{\sigma}[h]$$

$$- \quad VaR_N(h; 0.01) = \hat{r}[h] - 2.606 \hat{\sigma}[h]$$

Nelle pratiche applicazioni le stime dei parametri del modello ARMA-GARCH o di sue varianti, ottenute con il metodo della massima verosimiglianza sotto l'ipotesi di normalità sono molto simili a quelle ottenute sotto l'ipotesi di  $t$  di Student, mentre cambia in modo sostanziale il percentile  $a_{(\alpha)}$  come si può osservare confrontando i due metodi di calcolo del VaR. Nell'ipotesi di normalità, a parità di altre condizioni, il VaR con  $\alpha = 0.05$  è più elevato rispetto a quello  $t$  di Student, mentre avviene il viceversa se è  $\alpha =$

0.01. Naturalmente, man mano che  $g$  cresce, di solito basta che sia  $g > 10$ , le stime dei parametri del modello ed il relativo VaR<sup>18</sup> sono sempre più indistinguibili nei due esaminati. Sotto l'ipotesi che i residui standardizzati siano proporzionali ad una  $t_{(5)}$  è possibile derivare l'intervallo di confidenza, di seguito approfondito. In particolare, in questo caso si può verificare che è

$$- f^2(1.561) = 0.0113056 ;$$

$$- f^2(2.606) = 0.00033069$$

e quindi

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_N(h; 0.05) - 4.0995 \left[ \frac{\hat{\sigma}_N [h]}{\sqrt{N}} \right] &\leq VaR_N(h; 0.05) \\ &\leq \widehat{VaR}_N(h; 0.05) + 4.0995 \left[ \frac{\hat{\sigma}_N [h]}{\sqrt{N}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_N(h; 0.01) - 10.943 \left[ \frac{\hat{\sigma}_N [h]}{\sqrt{N}} \right] &\leq VaR_N(h; 0.05) \\ &\leq \widehat{VaR}_N(h; 0.01) + 10.943 \left[ \frac{\hat{\sigma}_N [h]}{\sqrt{N}} \right] \end{aligned}$$

Il percentile  $a_{(\alpha)}$  può essere stimato in modo non parametrico utilizzando l'ordinamento statistico dei residui standardizzati  $\hat{a}_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, N$ . Supponiamo che sui rendimenti  $(r_1, r_2, \dots)$  osservati su un attivo finanziario o monetario sia stato stimato un modello della classe ARMA-GARCH o sue varianti e di aver ottenute le stime dei residui standardizzati. Questi residui vengono ordinati in senso non decrescente ottenendo l'ordinamento statistico  $\hat{a}_1 \leq \hat{a}_2 \leq \hat{a}_3 \leq \dots \hat{a}_n$ . Fissato  $\alpha$  si scelgono  $\hat{a}_{([N\alpha])}$  e  $\hat{a}_{([N\alpha]+1)}$  cioè  $\hat{a}_{(t)}$  di posto  $[N\alpha]$  e  $[N\alpha] + 1$  dove con  $[N\alpha]$  si è indicato il massimo intero di  $N\alpha$ . La stima del percentile  $a_{(\alpha)}$  viene ottenuta come media aritmetica di questi due valori

---

<sup>18</sup> Saita F. (2007), Value at Risk and Bank Capital Management, Amsterdam, *Academic Press- Elsevier*.

selezionati. Di solito la stima per mezzo della media, o sue varianti più sofisticate, è poco efficiente per valori di  $\alpha$  piccoli, così come avviene nel calcolo del VaR.

### 1.3.1 Intervello di confidenza per il VaR

E' possibile costruire un intervallo di confidenza<sup>19</sup> asintotico per il VaR partendo da

$$\sqrt{N}(\hat{x}_{(\alpha)} - x_{(\alpha)}) \xrightarrow{L} N\left(0; \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(x_{(\alpha)})}\right), \quad 0 < \alpha < 1$$

Se il modello MA(q) – GARCH (1,1) utilizzato per rappresentare i rendimenti è adeguato, un intervallo di confidenza approssimato al livello del 95% per il VaR è dato da

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_N(h; \alpha) - 2 \left[ \frac{\alpha(1-\alpha)\hat{\sigma}_n^2[h]}{Nf_{(a(\alpha))}^2} \right]^{\frac{1}{2}} &\leq VaR_N(h; \alpha) \\ &\leq \widehat{VaR}_N(h; \alpha) + 2 \left[ \frac{\alpha(1-\alpha)\hat{\sigma}_n^2[h]}{Nf_{(a(\alpha))}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ove si è tenuto conto che nella normale standardizzata il percentile corrispondente a  $(0.05/2)$  è  $z_{(0.05/2)} = -1.96$  e quello per  $(1-0.05/2)$  è  $z_{(1-0.05/2)} = 1.96$ . Per rendere applicabile l'ultima formula indicata è necessario, fissato  $\alpha$ , conoscere la funzione di densità  $f(a)$  di  $a_t$  e quindi derivare  $a_{(\alpha)}$ . Sotto l'ipotesi che il processo dei residui standardizzati  $a_t$  sia oltre che i.i.d, Normale e per  $\alpha = 0.05$  si ha  $a_{(0.05)} = 1.645$  mentre risulta che

---

<sup>19</sup> Storti G. Vitale C.D. (2011) *Analisi Statistica dei Mercati Monetari e Finanziari – Analisi Univariata*, Edizioni Statistiche.

$$\begin{aligned} \widehat{VaR}_N(h; 0.05) - 4.2264 \left[ \frac{\hat{\sigma}_N [h]}{\sqrt{N}} \right] &\leq VaR_N(h; 0.05) \\ &\leq \widehat{VaR}_N(h; 0.05) + 4.2264 \left[ \frac{\hat{\sigma}_N [h]}{\sqrt{N}} \right] \end{aligned}$$

#### 1.4 Altri metodi di stima: Simulazioni Storiche e Simulazioni Monte Carlo

Il tentativo di superare alcuni problemi connessi all'approccio Var/Cov ha condotto allo sviluppo dei modelli di simulazione. Tale famiglia di modelli deve il suo nome al fatto che, anziché limitarsi a derivare il VaR partendo da pochi parametri sintetici (appunto: varianze e covarianze) della distribuzione dei fattori di rischio, si procede simulando un grande numero di possibili "scenari" riguardanti la possibile evoluzione futura dei mercati. L'approccio della simulazione è dunque più dispendioso in termini di tempo, e capacità di calcolo, ma come vedremo è anche più flessibile e, sovente, più accurato. I modelli di simulazione condividono, in linea di massima, tre caratteristiche: il ricorso alla full valuation, il ricorso alla logica del percentile, una maggiore libertà nel modellare le variazioni dei fattori di mercato. Tuttavia, essi comprendono al proprio interno diversi approcci, e principalmente quello delle simulazioni storiche e quello delle simulazioni Monte Carlo<sup>20</sup>, che si differenziano per il modo in cui gli scenari riguardanti i fattori di rischio vengono generati. Iniziamo quindi indicando le tre caratteristiche comuni ai modelli di simulazione. Si è visto come l'approccio varianze-covarianze stimi la variazione di valore di un portafoglio attraverso un sistema di coefficienti di sensibilità, solitamente lineari. I modelli di simulazione si fondano invece su una logica di valutazione piena (full valuation). In altri termini, il valore di

---

<sup>20</sup>Bera, Anil K.; Carlos M. Jarque (1981). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals: Monte Carlo evidence. *Economics Letters* 7 (4): 313-3.

mercato del portafoglio di cui si intende stimare il VaR viene completamente ricalcolato mediante opportune formule di pricing, sulla base di nuovi valori simulati dei fattori di mercato. La full valuation è utilizzata dalla maggior parte dei modelli di simulazione: tuttavia, è importante notare che nulla vieta, in linea teorica, di applicare la logica della simulazione e insieme di continuare a calcolare le possibili variazioni di valore del portafoglio utilizzando la tecnica dei coefficienti di sensibilità. In altri termini, approccio della simulazione e approccio della full valuation, pur essendo di solito applicati insieme, sono due meccanismi distinti volti a risolvere problemi diversi. L'approccio della simulazione è usato per generare i possibili valori futuri dei fattori di rischio, mentre la full valuation è utilizzata per tradurre tali valori nel corrispondente valore futuro di portafoglio, andando ad evidenziare le possibili perdite. Una seconda caratteristica dei modelli di simulazione riguarda la modalità di determinazione del VaR corrispondente al livello di confidenza prescelto. Nell'approccio varianze/covarianze il problema viene risolto ipotizzando che, stanti la distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato e il legame lineare tra questi ultimi e le variazioni di valore del portafoglio, i percentili della distribuzione delle perdite future possono essere stimati partendo dalla deviazione standard e da una costante moltiplicativa. Nei modelli di simulazione, invece, dopo aver generato la distribuzione di probabilità degli N possibili valori futuri del portafoglio (corrispondenti agli N scenari simulati per i fattori di rischio), il VaR viene stimato tagliando tale distribuzione empirica in corrispondenza del percentile associato al livello di confidenza desiderato. Ad esempio, considerando 10.000 simulazioni dei fattori di mercato che generano 10.000 valori del portafoglio, il VaR<sup>21</sup> al 95% viene calcolato prendendo il quinto percentile e calcolando la differenza tra tale valore e il valore corrente del portafoglio, se per esempio il valore corrente del portafoglio è 100 e il quinto percentile è 43, il VaR sarà pari a 57. Come la valutazione piena risolve il problema della non linearità delle relazioni di pricing, così l'utilizzo della

---

<sup>21</sup> Saita F.(2000), Il risk management in Banca, Milano, *Egea*.

distribuzione di probabilità simulata dei valori del portafoglio risolve il problema della non-normalità della distribuzione delle perdite future. Infatti, la distribuzione simulata non è vincolata a essere normale, ma può assumere qualsiasi forma, in particolare, essa tenderà a discostarsi dalla distribuzione normale quando:

- La distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio non è normale (leptocurtica)
- Relazione tra rendimenti dei fattori di rischio e valore del portafoglio non è lineare

In questi casi<sup>22</sup>, con il metodo Var/Cov imponendo che la distribuzione sia normale e utilizzando i percentili della normale standard per la determinazione del VaR, risulterebbe altamente impreciso. Con le simulazioni invece si riesce ad approssimare con maggiore accuratezza le possibili perdite future. La tecnica del “taglio” della distribuzione empirica di probabilità riesce a superare anche i problemi legati alla non monotonicità della relazione tra il fattore di mercato e valore del portafoglio. I possibili valori del portafoglio vengono infatti ordinati dal migliore al peggiore, indipendentemente dal movimento del fattore di mercato che li ha generati. Una perdita rilevante in base al livello di confidenza prescelto ma generata da un movimento non estremo del fattore di mercato, viene trascurata nei modelli parametrici, ma correttamente considerata nei modelli di simulazione. Numerosi studi empirici hanno mostrato come la distribuzione dei rendimenti dei prezzi e dei fattori di mercato sia in realtà caratterizzata da code spesse e da un livello di curtosi superiore a quello di una distribuzione normale, in alcuni modelli parametrici viene aumentato arbitrariamente il multiplo della deviazione standard prescelto. I modelli di simulazione superano questo problema, perché non costringono a utilizzare una distribuzione normale per modellare le variazioni dei fattori di mercato. In particolare, è possibile procedere in due modi:

---

<sup>22</sup>Sironi A. (2005), *Gestione del rischio e allocazione del capitale nelle banche*, Milano, *Egea*.

1. *Simulazioni storiche* (approccio non parametrico) generano gli scenari relativi ai fattori di rischio a partire dalla distribuzione empirica derivante dalla serie storica delle variazioni passate dei fattori di mercato.

2. *Simulazioni Monte Carlo* richiedono invece che venga definita una distribuzione sulla base della quale generare le simulazioni. Questa distribuzione in linea teorica può essere prescelta liberamente, ma per essere di utilizzo pratico deve rispettare due requisiti fondamentali: rispecchiare nel modo migliore possibile le caratteristiche empiriche delle distribuzioni delle variazioni dei fattori di mercato e prestarsi alla generazione di simulazioni casuali. Per questo secondo motivo, in pratica, viene spesso utilizzata proprio la distribuzione normale, visto che essa consente di generare rapidamente un elevato numero di scenari.

Esiste poi un terzo metodo, complementare ai primi due “stress testing” che anziché generare un ampio numero di scenari, tale da approssimare ragionevolmente l’intera distribuzione degli eventi possibili, si concentra su pochi scenari particolarmente sfavorevoli.

#### **1.4.1 Le simulazioni storiche**

In un modello di simulazione storica si ipotizza che potenziali variazioni dei fattori di mercato siano ben rappresentate dalla loro distribuzione empirica storica, cioè dalle variazioni registrate in un periodo passato. In altri termini, si ipotizza che la distribuzione delle variazioni dei fattori di rischio<sup>23</sup> sia stabile nel tempo, così che il loro comportamento passato rappresenti una guida affidabile per prevedere i loro possibili movimenti futuri. Le variazioni<sup>24</sup> dei fattori di rischio registrate in passato vengono trasformate in

---

<sup>23</sup> Sironi A. Resti A, (2008) Rischio e Valore nelle banche. Risk Management e Capital Allocation.

un possibile valore futuro del portafoglio tramite la full valuation (eliminando così ogni distorsione connessa ad approssimazioni lineari o quadratiche delle vere relazioni di pricing). Una volta calcolate le variazioni di valore del portafoglio corrispondenti a ciascuna delle variazioni storiche dei fattori di mercato, queste vengono ordinate dalla minore alla maggiore, ovvero dalla massima perdita al massimo profitto. In questo modo si ottiene una distribuzione empirica di probabilità delle variazioni di valore del portafoglio<sup>25</sup>. Quest'ultima viene tagliata al percentile corrispondente al livello di confidenza richiesto. Il corrispondente cambiamento di valore del portafoglio è uguale al VaR desiderato. Il procedimento è così sintetizzabile:

1. Selezione di un campione di rendimenti (giornaliero) dei fattori o del fattore di mercato rilevati, relativo ad un determinato periodo storico.
2. Rivalutazione della singola posizione o del portafoglio in corrispondenza di ognuno dei valori storici dei rendimenti del fattore di mercato.
3. Ricostruzione della distribuzione empirica di frequenza.
4. Taglio della distribuzione in corrispondenza del percentile relativo al livello di confidenza desiderato.
5. La differenza tra il percentile e il valore corrente del portafoglio rappresenta il VaR.

Individuate le fasi, che verranno rese operative nell'ultima parte dell'elaborato è possibile soffermarsi sinteticamente sui principali vantaggi e svantaggi. I pregi sono così sintetizzabili:

- Anzitutto le simulazioni storiche rappresentano una soluzione al problema della misurazione del rischio la cui logica sottostante risulta facilmente comprensibile e comunicabile fra le varie unità di una banca. Il risultato cui tale metodologia perviene rappresenta infatti

---

<sup>25</sup> Maspero D. (1997) I modelli VaR basati sulle simulazioni in Sironi A, Marsella M. La misurazione e la gestione di mercato. Modelli, strumenti, politiche, Bologna, *Il Mulino*.

al perdita che si otterrebbe se le condizioni passate, in termini di variazioni congiunte dei fattori di mercato, dovessero ripetersi in futuro.

- Esse non richiedono di esplicitare alcuna ipotesi particolare circa la forma funzionale della distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato. Per la verità, esse richiedono l'ipotesi che la distribuzione dei rendimenti futuri sia correttamente approssimata dalla distribuzione storica. Ne segue che, se i rendimenti dei fattori di mercato non sono distribuiti normalmente, ma hanno un comportamento probabilistico stabile nel tempo, il modello delle simulazioni storiche fornisce indicazioni più precise rispetto ai modelli parametrici.

- In terzo luogo, le simulazioni storiche non richiedono di stimare la matrice Var/Cov dei fattori di mercato che possono influenzare il valore del portafoglio considerato. Il rischio connesso a portafogli il cui valore è influenzato da più variabili di mercato è infatti calcolato sulla base delle variazioni congiunte di tali variabili verificatesi nel corso del periodo storico prescelto. Ne segue che le simulazioni storiche catturano la struttura delle correlazioni riflessa nelle variazioni congiunte dei fattori di mercato e ipotizzano implicitamente che essa resti costante anche in futuro.

A fronte di tali vantaggi<sup>26</sup>, le simulazioni storiche soffrono di limiti quali:

- Implicita considerazione di stabilità temporale (stazionarietà) della distribuzione di probabilità delle variazioni di mercato. Il metodo assume che la distribuzione futura sia uguale a quella passata, ossia che i rendimenti storici provengono da distribuzioni di probabilità, valide nei diversi istanti temporali, indipendenti e identicamente distribuite. Se invece la distribuzione dei rendimenti dei fattori di mercato cambia nel tempo, eteroschedasticità, allora la distribuzione di probabilità usata come input nel modello è un ibrido

---

<sup>26</sup> Riesti A., Sironi A., *op. cit.*

di realizzazioni di variabili diversamente distribuite, e come tale ha uno scarso significato sia concettuale che operativo.

- Un ultimo limite è relativo alla limitatezza delle serie storiche disponibili, specie se l'orizzonte temporale prescelto per il calcolo del VaR è superiore a un giorno. Il numero limitato di osservazioni storiche disponibili si traduce tipicamente in una scarsa definizione delle code della distribuzione empirica di probabilità. Le uniche variazioni dei fattori di mercato che il modello considera possibili sono infatti quelle verificatesi in passato, nell'orizzonte storico preso a riferimento.

Esiste quindi una relazione di trade-off riguardo alla lunghezza ottimale della serie storica di riferimento: considerazioni di stabilità della distribuzione delle variazioni di mercato la vorrebbero breve; requisiti di adeguata rappresentazione dei fenomeni estremi la esigerebbero lunga. Va detto infine che le simulazioni storiche tendono a produrre misure di VaR poco reattive alle variazioni delle condizioni dei mercati, specie se il livello di confidenza è elevato. Ciò è dovuto al fatto che il VaR non cambia fino a quando nel mercato non si presenta un rendimento superiore a quello corrispondente al percentile prescelto o fino a quando quest'ultimo non esce dal campione storico di stima. Si tratta di un pregio in termini di stabilità ma un limite in termini di utilità. Abbiamo fin ora ipotizzato l'orizzonte temporale su cui si vuole calcolare il VaR sia simile alla frequenza con cui sono stati rilevati i dati del campione storico. Naturalmente, non è detto che sia così. Una banca potrebbe disporre, per esempio, di una serie storica di rendimenti giornalieri, ma essere interessata al VaR su un orizzonte di rischio di una settimana. In questo caso la banca potrebbe utilizzare la medesima serie storica<sup>27</sup> per produrre rendimenti con periodicità settimanale; ciò condurrebbe tuttavia a una riduzione del numero di osservazioni disponibili. Un approccio alternativo al problema viene dal modello del bootstrapping e della generazione di traiettorie. Il bootstrapping prevede, in pratica, che anziché

---

<sup>27</sup> Vicario G, Levi R.. (2008) – Metodi statistici per la sperimentazione.

usare una e una sola volta ogni rendimento passato compreso nel campione di rendimenti storici, si estragga dal campione un elevato numero di valori; ogni volta, il valore estratto viene re-immesso nel campione, così che è possibile che venga estratto due o più volte lo stesso rendimento<sup>28</sup>. Indichiamo con  $r_{1,t+1}$  il primo di questi rendimenti. Immaginiamo che si tratti di un rendimento giornaliero e che la banca sia interessata a stimare il VaR su un arco temporale di una settimana. Per prima cosa, usiamo tale rendimento per determinare il valore assunto il giorno dopo dal fattore di rischio da cui dipende il valore del portafoglio. Otteniamo  $S_{1,t+1} = S_t e^{r_{1,t+1}}$ , a questo punto attuando il bootstrapping è possibile estrarre dal campione di rendimenti passati un nuovo rendimento giornaliero, che esprime il possibile rendimento del fattore di rischio del secondo giorno di questo primo scenario. Il procedimento può essere ripetuto per il terzo giorno e per i successivi, fino a ottenere un vettore di sette rendimenti  $(r_{1,t+1}, \dots, r_{1,t+7})$  che consente di stimare il possibile valore, tra una settimana del fattore di rischio. Ovviamente, il vettore fin qui generato rappresenta solo una possibile traiettoria che il valore del fattore di rischio potrebbero seguire nei prossimi sette giorni. Per poter costruire una distribuzione di N possibili valori del portafoglio della banca tra una settimana, è necessario generare altre N – 1 traiettorie, cioè generare, in tutto N x M valori di r. La generazione di traiettorie con il metodo del bootstrapping conduce a risultati corretti se i rendimenti giornalieri sono distribuiti in modo identico e indipendente. Se così non fosse, infatti, una traiettoria basata su rendimenti giornalieri estratti tutti dalla stessa distribuzione condurrebbe a una rappresentazione irrealistica della distribuzione di probabilità dei possibili valori del portafoglio al termine dell'orizzonte di rischio considerato. Si è visto come l'approccio ibrido rappresenti un possibile strumento per rendere più realistica l'ipotesi di

---

<sup>28</sup> Con questo procedimento si ipotizza implicitamente che i residui abbiano un'identica probabilità di essere estratti (distribuzione uniforme). Una maggiore sensibilità al trend attuale è ottenibile attribuendo un peso maggiore alle osservazioni recenti e facendo decrescere quest'ultimo in modo esponenziale a mano a mano che le osservazioni sono datate.

stabilità della distribuzione dei rendimenti dei fattori di rischio. La soluzione offerta da questo approccio, che attribuisce un maggior peso ai rendimenti più recenti, dunque ai livelli di volatilità dimostrati dal mercato nell'ultimo periodo, rappresenta tuttavia una risposta parziale e approssimativa; ciò stimola l'interesse verso ulteriori soluzioni al problema. Una prima proposta venne da Hull e White (1998)<sup>29</sup> che suggeriscono di aggiustare i dati storici sulla base delle condizioni attuali della volatilità dei fattori di rischio. Tale approccio, detto *volatility weighted*, consente di ottenere stime del VaR diverse da quelle implicite nel campione storico di riferimento e maggiormente sensibili alle condizioni correnti del mercato. In pratica, in presenza di un incremento della volatilità, i rendimenti storici vengono corretti al rialzo conducendo così a stime di VaR superiori a quelle implicite nella distribuzione storica. Il lavoro di Hull e White si ferma all'intuizione che l'eteroschedasticità dei fattori di mercato può essere incorporata nella logica delle simulazioni storiche ri-scalando le serie temporali per la volatilità condizionata all'informazione disponibile al momento della stima del VaR; esso lascia tuttavia un margine di flessibilità circa le modalità con cui tale procedimento può avvenire. Una strategia alternativa è quella proposta da Barone-Adesi e Giannopoulos (1998) denominata delle "simulazioni storiche filtrate"<sup>30</sup>. Questo approccio concretamente utilizzato per il controllo del rischio presso la London Clearing House, la cassa di compensazione del mercato dei futures di Londra (LIFFE), si basa su due idee di fondo:

- Utilizzo di modelli GARCH per filtrare i dati e rendere i residui i.i.d.;
- Utilizzare tali residui generati per realizzare scenari con tecnica del bootstrapping. In questo modo, si cerca di tenere in

---

<sup>29</sup> Hull J., White A. (1998), Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk, *Journal of Risk*, 1, pp.5-19.

<sup>30</sup> Barone-Adesi G., Giannopoulos K., Vosper L. (1998), VaR Without Correlation for Non-Linear Portfolios, *Journal of futures Markets*, 19, pp.583 – 602

considerazione sia la non-normalità dei rendimenti dei fattori di rischio, sia la loro eteroschedasticità.

Il primo passaggio parte dalla considerazione che, se la volatilità dei rendimenti dei fattori di rischio non è costante ma stocastica, è necessario cercare di modellarla in qualche modo. A tal fine, assume che la volatilità segua un processo GARCH e ne stima i parametri utilizzando i dati storici. E' possibile ipotizzare, che i rendimenti seguano un semplice modello GARCH(1,1):

$$r_t = \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

Se anche i rendimenti seguissero un modello più complesso di quello indicato in  $r_t = \varepsilon_t$ , ad esempio si rinvenisse un fenomeno di correlazione, si potrebbe comunque eliminare, attraverso una regressione la parte deterministica e concentrarsi sui residui stocastici. Dopo aver stimato i coefficienti delle equazioni viste sopra, diventa possibile standardizzare “filtrare” i rendimenti storici dividendoli per la stima della volatilità condizionata relativa al corrispondente periodo.

$$e_t = \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}$$

Se il modello<sup>31</sup> è corretto, questi rendimenti standardizzati sono i.i.d. ed è dunque possibile utilizzarli per la simulazione storica. Il secondo passaggio introduce la tecnica del bootstrapping filtrato per generare dati casuali partendo da un campione storico. Si utilizza infatti il bootstrapping per estratte casualmente, con re-inserimento, un elevato numero N di valori, il campione di partenza, tuttavia, è quello non dei rendimenti storici, ma dei rendimenti filtrati. Ognuno dei  $e_i$  (con  $i = 1, \dots, N$ ) generati attraverso estrazioni casuali viene quindi moltiplicato per la stima della volatilità

condizionata relativa al periodo t+1 per cui si desidera calcolare il VaR. In questo modo, viene simulata un'intera distribuzione per i rendimenti del fattore di rischio, coerente con la storia passata ma anche con la volatilità corrente. Così, se il primo residuo estratto è  $e_1$ , il primo shock che viene simulato per il tempo t+1 è ottenuto calcolando:

$$r_1 = \varepsilon_1 = e_1 \cdot \hat{\sigma}_{t+1}$$

dove  $\hat{\sigma}_{t+1}$  rappresenta la previsione della volatilità condizionata ottenuta sulla base del modello GARCH<sup>32</sup>. Analogamente, vengono generati i valori di  $r_2, r_3, \dots, r_n$ . A partire da ognuno di essi, il portafoglio viene rivalutato, così da ottenere una distribuzione di N possibili valori futuri. Tagliando tale distribuzione in corrispondenza del percentile desiderato, e calcolando la differenza tra tale percentile e il valore corrente del portafoglio, si ottiene il VaR.<sup>33</sup> Se l'orizzonte di rischio è superiore alla frequenza di calcolo dei rendimenti, è possibile applicare una versione filtrata del metodo basato sulla generazione di traiettorie. Indichiamo con  $r_{1, t+1} = \varepsilon_{1, t+1}$  il primo rendimento giornaliero generato, si noti che non si tratta di rendimenti filtrati, ma di quello pesato con la volatilità corrente. Sulla base di tale rendimento è possibile determinare il valore assunto l'indomani dal fattore di rischio S nel primo scenario:

$$S_{1, t+1} = S_t e^{r_{1, t+1}}$$

Inoltre, partendo dal rendimento simulato e applicando  $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$  è possibile ottenere<sup>34</sup> una stima di sigma del livello di volatilità tra due giorni:

$$\hat{\sigma}_{t+2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t+1}^2 + \beta_1 \sigma_{t+1}^2$$

---

<sup>32</sup> Bohn J., Kealhofer S. (2001), *Portafolio Management of Default Risk*, Working paper, San Francisco, KMV

<sup>33</sup> Gallo, G.M. e B. Pacini (2002). *Metodi quantitativi per i mercati finanziari*. Roma: Carocci.

<sup>34</sup> Bollerslev T. (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327

A questo punto, utilizzando nuovamente il bootstrapping è possibile estrarre dal campione di rendimenti filtrati un nuovo valore casuale  $e_{1, t+2}$  che esprime il possibile rendimento filtrato nel secondo giorno di questo primo scenario. Moltiplicando tale valore per la stima della volatilità appena ottenuta, si genera un rendimento simulato coerente con la volatilità prevista per il secondo giorno:

$$r_{1, t+2} = \varepsilon_{1, t+2} = e_{2, t+2} \cdot \hat{\sigma}_{t+2}$$

Come in precedenza, il procedimento può essere ripetuto per il terzo giorno e per i successivi, fino a ottenere un vettore di sette rendimenti ognuno dei quali viene aggiustato per la relativa volatilità stimata. Tale vettore consente di stimare il possibile valore tra una settimana del fattore di rischio

$$S_{1, t+7} = S_t e^{\sum_{i=1}^t r_{1, t+i}}$$

e quindi del portafoglio della banca in questo primo scenario.

#### 1.4.2 Le simulazioni Monte Carlo

L'applicazione delle simulazioni Monte Carlo<sup>35</sup> ai problemi di risk management è invece più recente e risale agli anni Ottanta. La logica è la stessa utilizzata nel pricing: partendo da una distribuzione teorica, opportunamente parametrizzata, si procede a simulare un numero elevato di volte l'evoluzione di una variabile di mercato e a ricalcolare il valore di mercato della singola posizione di rischio in corrispondenza di ognuno degli scenari così costruiti. Una volta ottenuta la distribuzione di probabilità delle variazioni del valore di mercato della posizione in esame, il VaR viene stimato seguendo la logica del percentile. Non si vuole dunque, come nelle

---

<sup>35</sup> Christoffersen P.F. (1998), Evaluating Interval Forecasts *International Economic Review*, 39, November, pp.841-862.

applicazioni di pricing, stimare il valore atteso del portafoglio, bensì riordinare le osservazioni, tagliarle in corrispondenza del percentile desiderato e individuare il relativo VaR. La stima del VaR di una posizione il cui valore è sensibile ai rendimenti  $r$  di un unico fattore di mercato si compone di 5 fasi:

1. Scelta della distribuzione di densità di probabilità  $f(r)$  che meglio approssima la distribuzione dei rendimenti del fattore di mercato in esame;
2. Stima dei parametri descrittivi della distribuzione  $f$ ;
3. Simulazione di  $N$  scenari per il fattore di mercato, partendo dalla distribuzione  $f$ ;
4. Calcolo della variazione del valore di mercato della posizione in corrispondenza di ognuno degli scenari simulati;
5. Taglio della distribuzione di probabilità così ottenuta in corrispondenza del percentile relativo al livello di confidenza desiderato;

Si noti che fasi 1-3 sono le peculiari della simulazione Monte Carlo. La fase 1 risulta senza dubbio la più complessa, e dove è necessario avere “fede”, se la distribuzione scelta non rappresenta correttamente le possibili evoluzioni future del fattore di rischio, anche gli scenari generati per tale fattore e per la posizione risulteranno irrealistici, e così pure il VaR. Sul piano pratico, tuttavia, risulta particolarmente impegnativa anche la fase 3, che richiede il ricorso a un generatore di numeri casuali con cui estrarre  $N$  valori dalla distribuzione di probabilità del fattore di rischio. Il metodo più frequentemente utilizzato è basato su due fattori: l’inversa della funzione associata ad  $f$ ; che indicheremo con  $F^{-1}(p)$  e una serie di  $N$  estrazioni casuali da una distribuzione uniforme con valori compresi nell’intervallo  $[0,1]$ . In questo caso, la fase 3 può essere a sua volta scomposta in due passaggi:

- I. Estrazione di un valore  $p$  dalla distribuzione uniforme;
- II. Calcolo del valore  $r$  tale che  $r = F^{-1}(p)$ .

Il risk manager, preso in esame un titolo e concluso che la distribuzione meglio applicabile è una normale, procede ad estrarre mediante un generatore

di numeri casuali basato su una distribuzione uniforme [0,1], N valori compresi fra zero e uno. A ognuno di tali valori  $p$  associa il corrispondente valore  $r = F^{-1}(p) = N^{-1}$  utilizzando l'inversa della funzione di ripartizione della distribuzione normale con media ad esempio 0,15% e deviazione standard pari a 1.5%. Per l'esattezza poiché di solito la routine di calcolo<sup>36</sup> disponibili per gli elaborati sono in grado di calcolare l'inversa della funzione di ripartizione della variabile campione della distribuzione normale standard il valore di  $F^{-1}(p)$  verrà ottenuto come:

$$F^{-1}(p) = N^{-1}(p; \mu\sigma) = \mu + N^{-1}(p) \cdot \sigma = 0.15\% + N^{-1}(p) \cdot 1.5\%$$

Cioè generando prima un valore  $v$  distribuito secondo una normale standard che rispetti la distribuzione normale con media (come ad esempio 0.15) e deviazione standard (1.5%). Quindi, tale valore viene interpretato come la probabilità cumulata generata da una funzione di ripartizione normale standard e si individua il valore  $v$  della variabile casuale normale standard che avrebbe determinato una simile probabilità cumulata. Infine, il valore viene aggiustato per renderlo coerente con i parametri media e varianza stimati a partire dai dati storici delle variazioni dell'indice considerato. I vantaggi connessi all'utilizzo della simulazione Monte Carlo sono numerosi. Un primo esempio è comune a tutti i metodi di simulazione che fanno ricorso alla full-valuation<sup>37</sup>: simulando l'evoluzione dei fattori di mercato e ricalcolando il valore di mercato delle posizioni che compongono l'intero portafoglio, viene superato il problema della non linearità e/o non monotonicità dei payoff delle posizioni. Un secondo vantaggio consiste nel fatto che esso si presta a essere utilizzato con qualunque distribuzione di probabilità dei rendimenti dei fattori di mercato. In altri termini, diversamente dall'approccio varianze-covarianze,

---

<sup>36</sup> Danielsson J., De Vries C.G. (1997), Multivariate stochastic volatility models: estimation and a comparison with GARCH models, mimeo, Department of Economic, University of Iceland.

<sup>37</sup> Embrechts P., McNeil A.J., Straumann D., (2002) Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls in Dempster M., Risk Management: Value at Risk and Beyond, Cambridge, Cambridge University Press

il quale trova giustificazione unicamente in funzione dell'ipotesi di una distribuzione normale, il metodo in esame lascia il risk manager libero di scegliere la distribuzione ritenuta più idonea a spiegare le variazioni dei fattori di mercato in esame. Infine, anche il Metodo Monte Carlo può essere utilizzato per generare traiettorie, descrivendo non solo il valore finale assunto dalle variabili di mercato al termine del periodo di simulazione, ma anche il percorso che ha determinato tale valore finale, utile per analizzare il rischio di payoff il cui valore finale dipende anche dai valori intermedi dei fattori di mercato. Di reazione ai vantaggi è necessario citare alcuni svantaggi: si pensi al fatto che nel simulare l'evoluzione congiunta di più variabili di mercato, il metodo necessita, diversamente dalle simulazioni storiche di una stima della matrice di varianza covarianza dei fattori di mercato. E' dunque necessario produrre tale stima e mantenerla aggiornata. D'altra parte, è bene ricordare che anche le simulazioni storiche ipotizzano, implicitamente una certa struttura di varianze e covarianze, richiedendo peraltro che essa rimanga costante nel tempo. Le simulazioni Monte Carlo sono state originariamente utilizzate in finanza come strumento di pricing di prodotti complessi, si pensi alle opzioni esotiche, per i quali non è possibile ottenere una soluzione analitica. In pratica se sono valide alcune ipotesi sovente utilizzate nei modelli di pricing, allora il prezzo di uno strumento derivato è dato dal valore atteso del suo payoff futuro attualizzato al tasso del risk-free. Questo valore atteso può essere calcolato simulando un numero elevato di possibili evoluzioni delle condizioni di mercato e calcolando la media dei valori che il payoff verrebbe ad assumere in corrispondenza di ognuno degli scenari simulati. Se il numero di simulazioni è sufficientemente elevato, questo valore medio risulta uno stimatore non distorto del "vero" valore atteso del payoff. Se si considera un'attività X il cui prezzo dipende da un'unica variabile di mercato  $x$ , il metodo descritto consiste nell'estrarre dalla distribuzione teorica un numero elevato di valori  $x$ , ricalcolando il prezzo di mercato della posizione in corrispondenza di ognuno degli scenari simulati. Nel caso di un'attività X il cui valore di mercato dipende da più fattori di mercato  $x_1, x_2, \dots, x_m$  il metodo Monte Carlo richiede di simulare tutte le variabili estraendole da

un'opportuna distribuzione di probabilità congiunta e di ricalcolare il valore di mercato della posizione in corrispondenza di ognuno degli scenari simulati: in questo caso è necessario che vengano rispettati i vincoli di non arbitraggio connessi all'evoluzione congiunta delle diverse variabili. In entrambi i casi una volta ottenuta la distribuzione dei valori futuri sarà possibile calcolarne la media. In generale, dunque, nel caso dei prodotti derivati il metodo Monte Carlo è utilizzato per stimare il valore atteso di una funzione di uno o più variabili aleatorie; in termini analitici ciò equivale a stimare in modo approssimato l'integrale, pesato per la probabilità di una finzione  $X$  in uno spazio di dimensioni  $m (\geq 1)$ , pari al numero dei fattori di mercato rilevanti.

### 1.5 L'Expected Shortfall

Misure di rischio alternative al VaR che siano coerenti ed in grado di discriminare situazioni in cui l'informazione desunta dal VaR può essere non esaustiva ai fini della valutazione di scenari di investimento alternativi. Fra le diverse proposte emerse in letteratura, quella che senz'altro assume maggiore rilevanza, sia sul piano pratico che teorico, è l'*Expected Shortfall*. Sia  $r_t, t = 1, \dots, N$  una serie storica di rendimenti relativi ad un dato attivo finanziario. L'ES<sup>38</sup> al livello  $\alpha$  relativo al periodo  $[N, N+1)$  è dato dal valore atteso dei rendimenti condizionatamente all'informazione passata ed al fatto che si sia verificata una violazione del VaR ovvero;

$$ES_N(1;\alpha) = E(r_{N+1} | r_{N-1}) < VaR_N(1; \alpha), \zeta_N \text{ da cui}$$

$$ES_N(1;\alpha) < VaR_N(1; \alpha)$$

Sul piano economico, l'ES<sup>39</sup> misura la perdita a cui mediamente si andrà incontro nei casi in cui i rendimenti osservati risultino inferiori al VaR.

---

<sup>38</sup> Peel DA, Speight AEH, 1994, Testing for non-linear dependence in interwar exchange rates, *Weltwirtschaftliches Archiv*, 130, 391-417

<sup>39</sup> Embrechts, P., C. Klupplberg e T. Mikosch (1997), *Modelling Extremal Events. Berlin Verlag.*

Analogamente a quanto già visto per il VaR, la definizione  $ES_N(1;\alpha) = E(r_{N+1} | r_{N+1} < VaR_N(1; \alpha), \zeta_N)$  è facilmente generalizzabile al caso in cui il periodo di detenzione programmato sia di lunghezza  $h > 1$ . La definizione indicata, viene ad essere riformulata in termini della distribuzione dei rendimenti cumulati sul periodo  $[N, N+h)$  ovvero

$$ES_N(h;\alpha) = E(r_{N+h} | r_{N+h} < VaR_N(h; \alpha), \zeta_N).$$

In aggiunta alla discussione di carattere teorico sull'ES, sul piano statistico c'è da osservare che il calcolo dell'ES rispetto al VaR presenta il vantaggio di utilizzare anche l'informazione contenuta nella coda sinistra della distribuzione, cosa che invece non avviene con il VaR. Per assurdo, infatti, si potrebbe contaminare l'intera coda sinistra della distribuzione, sostituendo le osservazioni al di sotto del VaR con dei valori eccezionalmente piccoli, a patto che questi siano inferiori al VaR<sup>40</sup>, senza che il valore del VaR stesso ne risulti influenzato. In conclusione, l'ES<sup>41</sup> non va quindi necessariamente visto come un'alternativa al VaR ma come un'utile informazione destinata a completare ed integrare la valutazione del rischio espressa dal VaR.

Supponendo un modello di riferimento ARMA-GARCH, con un periodo di detenzione  $h = 1$ . Si assuma, in generale, che sia  $r_t \sim ARMA(p,q) - GARCH(s,v)$ . Si noti che, si ha  $r_{N+1} = r_N(1) + \varepsilon_{N+1}$  e  $\varepsilon_{N+1} = a_{N+1} \sigma_{N+1}$  ed è possibile scrivere

$$ES_N(1;\alpha) = E(r_{N+1} | \zeta_N, r_{N+1} < VaR_N(1; \alpha) =$$

$$E(r_N(1) + a_{N+1} \sigma_{N+1} | \zeta_N, r_{N+1} < VaR_N(1; \alpha))$$

Si osservi che i parametri noti del modello ARMA il valore di  $r_N(1) = E(r_{N+1} | \zeta_N)$  e  $\sigma_{N+1}$  sono determinati solo da  $\zeta_N$  e quindi noti. Tenendo anche

---

<sup>40</sup> Hull J., White A. (1998), Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed, *Journal of Derivates*, 5, pp.9-19.

<sup>41</sup> Gouriéroux C., Laurent J.P., Scaillet O. (2000) Sensitivity Analysis of Values at Risk, *Journal of Empirical Finance*, pp 225-245.

conto dell'indipendenza di  $a_{N+1}$  e  $\zeta_N$  ne segue che  $ES_N(1;\alpha) = r_N(1) + E(a_{N+1} \sigma_{N+1} | \zeta_N r_{N+1} < VaR_N(1; \alpha))$ . La precedente relazione può essere ulteriormente semplificata se si tiene conto del fatto che la disequazione  $r_{N+1} < VaR_N(1; \alpha)$  può essere riformulata nel modo che segue

$$r_{N+1} < VaR_N(1;\alpha) = r_N(1) + a_{N+1} \sigma_{N+1} < r_N(1) + a_{N+1} \sigma_{N+1} = a_{N+1} < a_\alpha$$

da cui  $ES_N(1; \alpha) = r_N(1) + \sigma_{N+1} c_\alpha$

Una stima di ES può essere ottenuta sostituendo i parametri incogniti dell'ultima equazione indicata con le corrispondenti stime. Sul piano pratico la stima dell'ES implica che, se interessati ad un modello ARMA-GARCH<sup>42</sup> precedentemente identificato e stimato, l'unico parametro aggiuntivo da stimare è  $c_\alpha$  viene affrontato diversamente a seconda che la distribuzione dell'errore  $a_t$  sia nota oppure no. Nel primo caso, inoltre si presentano difficoltà che la distribuzione dell'errore sia di tipo gaussiano o t di student. La necessità di ricorrere ad uno stimatore non parametrico di  $c_\alpha$  si fa sentire in particolar modo nel caso in cui le stime dei parametri del modello ARMA-GARCH siano state ottenute con il metodo della quasi Massima Verosimiglianza. Tale approccio, pur permettendo di stimare in maniera consistente i parametri dei modelli ARMA e GARCH per le componenti di media e varianza condizionata, non consente di fare inferenza sulla forma della distribuzione di  $a_t$  e dei suoi parametri. Una stima di  $c_\alpha$  può tuttavia essere ancora ottenuta utilizzando la semplice procedura che viene di seguito descritta:

---

<sup>42</sup> Crouhy M.,Turnbull S.,Wakeman L. (1999), Measuring Risk-Adjusted Performance, The Journal of Risk, vol.2, n.1, pp.1-31.

1- si salvano i residui standardizzati del modello ARMA-GARCH stimato per la serie storica dei rendimenti osservati dal tempo 1 al tempo N.;

2- si calcola il quantile empirico di ordine  $\alpha$  della serie storica dei residui standardizzati;

3- si stima  $c_\alpha$  come media dei residui  $\hat{a}_t$  tali che sia  $\hat{a}_t < \hat{a}_\alpha$

$$\hat{c}_\alpha = \sum_{t=1}^N \hat{a}_t I(\hat{a}_t < \hat{a}_\alpha) / \sum_{t=1}^N I(\hat{a}_t < \hat{a}_\alpha)$$

La stima dell'ES per orizzonti temporali di durata  $h > 1$  comporta delle difficoltà aggiuntive rispetto al caso  $h = 1$ . Similmente a quanto visto per il VaR tali difficoltà scaturiscono essenzialmente dall'incertezza associata alle realizzazioni future del processo dei rendimenti dalle quali viene a dipendere il valore di  $ES_N(h;\alpha)$ . In generale, non è possibile derivare una formula analitica per il calcolo dell'ES e, come per il VaR per la sua stima si rende necessario il ricorso a una procedura numerica basata su tecniche di simulazione. Sul piano economico, si procede in due passi. Prima si stima il VaR, poi si aggiunge a quanto individuato l'ulteriore passo ovvero

$$C_{N,h} = [r_{N+h}^{(1)} \dots r_{N+h}^{(i)} \dots r_{N+h}^{(m)}]$$

il vettore simulato dei rendimenti cumulati  $c_{N,h}$ . Si selezionano, all'interno di  $c_{N,h}$ , tutte le osservazioni il cui valore risulti inferiore al VaR stimato ovvero tali che siano  $r_{N+h}^{(i)} < VaR_{N,h}(\alpha)$ . Il valore di  $ES_N(h;\alpha)$  viene quindi stimato calcolando la media aritmetica di tali osservazioni

$$VaR_{N,h}(\alpha) = \sum_{i=1}^m r_{N+h}^{(i)} I(r_{N+h}^{(i)} < VaR_{N,h}(\alpha)) / \sum_{i=1}^m I(r_{N+h}^{(i)} < VaR_{N,h}(\alpha))$$

## 1.6 Valutazione della qualità delle stime VaR : il backtesting

Gli operatori finanziari, per motivi di natura sia normativa che strategica, hanno necessità di avere a disposizione stime del rischio di mercato realistiche e costantemente aggiornate. Il numero di modelli e procedure statistiche<sup>43</sup> potenzialmente utilizzabili per il perseguimento di questo fine è elevatissimo ed in continua crescita. Si rende quindi necessario predisporre degli strumenti statistici che permettono di

- 1- misurare la qualità delle stime del VaR ottenute attraverso un determinato approccio;<sup>44</sup>
- 2- confrontare le stime ottenute da diversi approcci alternativi.<sup>45</sup>

Tali valutazioni vanno ovviamente effettuate prima che un dato modello venga utilizzato sul campo. Al fine di rendere possibile la valutazione della qualità, delle stime, inoltre, è necessario disporre dei valori dei rendimenti osservati per i periodi relativamente ai quali si vuole misurare il rischio. Ciò è ovviamente possibile solo se la valutazione viene fatta a posteriori basandosi su dati storici. Nello specifico, si considera una serie storica, di lunghezza il più possibile elevata, di rendimenti passati relativa all'attivo o al portafoglio oggetto di interesse. Tale serie viene poi divisa in due parti delle quali la prima viene utilizzata per l'identificazione e la stima dei modelli mentre la seconda viene utilizzata per la stima del VaR e la valutazione della qualità delle stime ottenute. In pratica, i passi della procedura possono essere schematizzati nel modo seguente:

- data una serie storica di rendimenti di lunghezza  $N$ , se ne selezionano le prime  $M$  osservazioni ( $M < N$ ); ( $r_1, r_2, r_3, \dots, r_m$ );

---

<sup>43</sup> Jorion P.(1997) In defence of VaR, *Mimeo, University of California Irvine*.

<sup>44</sup> Christoffersen P.F.(2003), Elements of Financial Risk Management, *Academic Press, Elsevier Science*

<sup>45</sup> Amendola A, Niglio M, Vitale CD, 2009, Statistical properties of SETARMA models, *Communication in Statistics: theory and Methods*, 38.

- a partire dalla serie indicata, si identifica un opportuno modello statistico per i rendimenti e si utilizza tale modello per ottenere delle stime per il VaR relativo agli istanti da (M+1) a N:

$$(\text{VaR}_M(1;\alpha), \text{VaR}_{M+1}(1;\alpha)\dots)$$

- le stime del VaR relative al periodo di validazione, da M+1 a N, vengono confrontate con i rendimenti relativi allo stesso periodo al fine di valutarne la proprietà statistiche ed economiche.<sup>46</sup>

La procedura illustrata è nota, nella terminologia degli analisti finanziari, con il nome di backtesting e può essere generalizzata in maniera pressochè immediata al caso di stime del VaR con  $h > 1$ . Inoltre, al fine di tenere conto della presenza di cambiamenti strutturali nel processo che genera i rendimenti e le loro volatilità, è sufficiente introdurre un semplice correttivo che consiste nel prevedere la possibilità di ripetere le fasi di identificazione e stima del modello ad intervalli costanti, sulla base di una finestra mobile di osservazioni. Ad esempio, il modello viene inizialmente stimato ed identificato sulla base delle prime M osservazioni in  $[0, M)$  cioè  $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_m)$ . Utilizzando tale modello si procede a stimare il VaR per il periodo  $[M, M+k)$  con  $k > 0$ . Quindi, si ripete la procedura di identificazione e stima del modello utilizzando le osservazioni relative al periodo  $[k, k+M)$ , con  $K > 0$ . Quindi, si ripete la procedura di identificazione e stima del modello utilizzando le osservazioni relative al periodo. Il nuovo modello così ottenuto viene utilizzato per stimare il VaR per il periodo  $[M + k, M+ 2k)$  fino a che le fasi di identificazione e stima vengono nuovamente ripetute sulla base della serie  $(r_{M+k+1}, r_{M+k+2}, r_{M+k+3}, \dots, r_{M+2K})$ . I passi descritti vengono ripetuti<sup>47</sup> fino ad esaurimento delle osservazioni disponibili. In tal modo, si prevede implicitamente che il modello ottimale per i dati osservati possa cambiare nel

---

<sup>46</sup> Bera, A.K. e C.M.Jarque (1980) Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *In Economics Letters* 6, pp. 255-259

<sup>47</sup> Alexander C. (1996), *The Handbook of Risk Management and Analysis*, Chichester, John Wiley & Sons.

tempo. Di fatto, tale strategia equivale a sostituire un modello fisso nel tempo con un modello flessibile la cui forma funzionale e parametri possono variare tenendo conto di effetti di natura congiunturale e/o breks strutturali permanenti.

### 1.6.1 Test di Copertura

Sul piano statistico, il problema della stima del VaR coincide con la stima di un quantile estremo, di ordine  $\alpha < 1$ , della distribuzione condizionata dei rendimenti. E' quindi perfettamente ammissibile che occasionalmente il valore osservato del rendimento risulti inferiore al VaR senza che questo implichi necessariamente che il VaR non sia stato stimato in maniera accurata. Nello specifico, in corrispondenza di un modello correttamente specificato, ci si attende che, su un periodo sufficientemente lungo, i rendimenti osservati risultino inferiori al VaR all'incirca nell' $\alpha\%$  dei casi.

$$L_{M+j} = I(r_{M+j} < \text{VaR}_{M+J-1}(1, \alpha))$$

$$\begin{cases} = 1 & \text{se } (r_{M+j} < \text{VaR}_{M+J-1}(1, \alpha)) \\ = 0 & \text{se } (r_{M+j} \geq \text{VaR}_{M+J-1}(1, \alpha)) \end{cases}$$

che vengono anche dette eccezioni o violazioni con  $j = 1, \dots, N-M$ . E' immediato constatare che ogni  $L_{M+j}$  si distribuisce come una variabile casuale di Benulli con un parametro (probabilità di successo) pari ad  $\alpha$ :  $L_{M+j} \sim B(1; \alpha)$ ,  $j = 1, \dots, N - M$

Si noti che, assumendo che il modello di riferimento sia della classe (T)ARMA-GARCH, è possibile scrivere :

$$L_{M+j} = I(r_{M+j} < \text{VaR}_{M+J-1}(1, \alpha)) = I(r_{M+j-1}(1) + a_{M+j} \sigma_{M+j} < r_{M+j-1}(1) + a_{\alpha} \sigma_{M+j}) = I(a_{M+j} < a_{\alpha})$$

Ne segue che le eccezioni  $L_{M+j}$  in quanto funzioni di variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite, saranno anche esse i.i.d. Nelle pratiche applicazioni, non è possibile osservare le  $L_{M+j}$  ma solo delle loro

stime, che indicheremo con  $\hat{L}_{M+j}$  ottenute sostituendo a  $r_{M+j-1}$ ,  $\sigma^2_{M+j-1}$  e  $a_\alpha$  le loro stime  $\hat{r}_{M+j-1}$ ,  $\hat{\sigma}^2_{M+j-1}$  e  $\hat{a}_\alpha$ . Se il modello per rendimenti è correttamente specificato, ci attenderemo che la distribuzione delle L stimate non si discosti significativamente da quelle delle L osservate. Qualora, invece, il modello per i rendimenti non descriva adeguatamente il processo generatore sottostante, ci attenderemo che anche la distribuzione  $\hat{L}_{M+j}$  risulti marcatamente differente da quella teorica attesa per le L osservate sulla base della loro distribuzione, e in particolare potrebbero verificarsi le seguenti ipotesi:

- (h1):  $L_{M+j} \sim B(1; \alpha')$  con  $\alpha' \neq \alpha$
- (h2) : le  $L_{M+j}$  non sono indipendenti
- (h3) sia le h1 che la h2 risultano verificate .

In letteratura sono state proposte delle statistiche test per sottoporre a verifica rispettivamente, ciascuna delle precedente ipotesi:

- Test di corretta copertura marginale (h1)
- Test di indipendenza (h2)
- Test di corretta copertura condizionata (h3).

(h1) *Test di corretta copertura marginale* : Kupiec (1995)<sup>48</sup> ha proposto una statistica test per verificare l'ipotesi di corretta specificazione del modello contro un'ipotesi alternativa del tipo (h1). Questo test è noto anche come test di corretta copertura marginale. Nello specifico il sistema di ipotesi da sottoporre a verifica è :

$$\begin{cases} H_0 : \hat{L}_{M+j} \sim B(1; \alpha_0) \\ H_1 : \hat{L}_{M+j} \sim B(1; \alpha) \text{ con } \alpha \neq \alpha_0 \end{cases}$$

---

<sup>48</sup> Kupiec P., (1995) Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models, *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.

dove sono  $\alpha_0$  si è indicato il livello di copertura nominale desiderato. Una statistica test per verificare tale sistema di ipotesi può essere ottenuta attraverso il metodo del rapporto di verosimiglianza. Assumendo che  $\hat{L}_{M+j}$  siano indipendenti, la funzione di verosimiglianza è data da

$$L(\alpha; \hat{L}_{M+j}) = \alpha^{n_e} (1 - \alpha)^{n - n_e} \text{ per } j = 1, \dots, N - M \text{ dove } n_e = \sum_{j=1}^{N-M} I(r_{M+j} < VaR_{M+j-1}(1; \alpha))$$

quest'ultimo elemento rappresenta il numero delle eccezioni del VaR<sup>49</sup> avvenute nel periodo di riferimento. Le statistiche test ottenute attraverso il metodo del rapporto di verosimiglianza possono essere interpretate come delle misure di distanza fra il massimo globale della funzione di verosimiglianza  $L(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j})$ , raggiunto in corrispondenza dello stimatore di massima verosimiglianza,  $\hat{\alpha}$ , ed il massimo vincolato ottenuto sotto l'ipotesi che i vincoli espressi dall'ipotesi nulla siano verificati. Nel nostro caso, quest'ultimo valore viene ottenuto calcolando il valore della funzione di verosimiglianza in corrispondenza del punto  $\alpha_0$  :

$$\begin{aligned} L(\alpha; \hat{L}_{M+j}) &= \alpha^{n_e} (1 - \alpha)^{n - n_e} \text{ e la statistica test è data da } CM_M \\ &= -2 \log \frac{L(\alpha; \hat{L}_{M+j})}{L(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j})} = \\ &= -2 [\log(L(\alpha; \hat{L}_{M+j})) - \log(L(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j}))] \\ &= -2 [l(\alpha; \hat{L}_{M+j}) - l(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j})] \\ &= -2 [n_e \log(\alpha) + (n - n_e) \log(1 - \alpha) - n_e \log(\hat{\alpha}) \\ &\quad - (n - n_e) \log(1 - \hat{\alpha})] \end{aligned}$$

per  $j = 1, \dots, n$  con  $n = N - M$ . Massimizzando quest'ultima funzione rispetto ad  $\alpha$ , inoltre, è semplice verificare che lo strumento che lo stimatore di massima verosimiglianza di  $\alpha$  è dato da :  $\hat{\alpha} = n_e/n$ . Si può dimostrare che,

---

<sup>49</sup> Pritsker M., (1997) Evaluating Value-at-Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time. *Journal of Financial Services Research*.12, 201-241.

nel caso di  $H_0$  risulti verificata, se  $n$  è sufficientemente grande e se le  $\hat{L}_{M+j}$  sono indipendenti, allora  $CM \approx X^2_{(1)}$ . La regione critica del test si colloca nella coda destra della distribuzione ovvero rifiuteremo  $H_0$  al livello  $\beta$  se  $CM_M > X^2_{(1; 1-\beta)}$ , dove con  $X^2_{(1; 1-\beta)}$  si è indicato il quantile di ordine  $(1-\beta)$  di una variabile casuale chi-quadro con 1 grado di libertà. Così, per esempio, se si scegliesse un livello di significatività del 10% si avrebbe un valore critico della  $X^2_{(1; 1-\beta)}$  pari a 2.7055. Se il valore della statistica test fosse maggiore di 2.7055 il modello potrebbe essere rifiutato al livello di significatività del 10%. Consideriamo un caso di 250 osservazioni giornaliere e 4 eccezioni reattive a un modello VaR con livello di confidenza pari al 99% il corrispondente valore della statistica test sarebbe di 6.635. Il modello VaR<sup>50</sup> può dunque essere accettato come accurato. Se il p-value è inferiore al livello di significatività desiderato, allora l'ipotesi nulla può essere rifiutata. Un punto cruciale di un modello di backtesting è dunque rappresentato dal livello di significatività. In generale il test di Kupiec richiede un campione composto da un elevato numero di dati (circa 10 anni di dati giornalieri) per poter generare risultati affidabili. In particolare, la potenza statistica di questo test è piuttosto bassa; in altre parole, vi è un'alta probabilità di accettare l'ipotesi nulla quando invece è vera una specifica ipotesi alternativa; questa probabilità è tanto maggiore quanto più il valore di  $\alpha$  dell'ipotesi nulla diminuisce, ossia quanto maggiore è il livello di confidenza del modello, e quanto più piccola è la dimensione del campione. Occorre infatti osservare che per i piccoli valori del parametro  $\alpha$ , ossia per livelli di confidenza più elevati, diviene più difficile definire le ragioni di rifiuto e accettazione. Ciò principalmente dovuto al fatto che per livelli di confidenza elevati le eccezioni divengono, a parità di dimensione del campione, eventi più rari. Il test di Kupiec presenta il limite di focalizzarsi unicamente sulla capacità di un modello VaR<sup>51</sup> di generare un numero di eccezioni coerente con il relativo livello di confidenza,

---

<sup>50</sup> Simons K. (1996), Value at Risk - New Approaches to Risk Management, VAR: Understanding and Applying Value-at-Risk, RISK publications, London.

<sup>51</sup> Ritsker M.,(1997) Evaluating Value-at-Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time, *Journal of Financial Services Research*, 12, 201-241

senza considerare la distribuzione temporale di tali eccezioni. In questo senso, anche un modello che alterna periodi in cui il VaR<sup>52</sup> è sottostimato (con un numero di eccezioni elevato) a periodi in cui il VaR è sovrastimato (e dunque il numero di eccezioni è basso) potrebbe risultare idoneo utilizzando questo test statistico. Il test di Kupiec è infatti un test della bontà non condizionale di un modello, nel senso che la qualità di un modello è valutata in modo indipendente dalla capacità di reagire alle informazioni riflesse nelle nuove condizioni di mercato.

(h2) *Test di indipendenza:* Al fine di valutare l'attendibilità dei risultati del test di corretta copertura marginale, si rende quindi necessario verificare l'ipotesi di indipendenza delle  $\hat{L}$  attraverso un test di indipendenza delle  $\hat{L}_{M+j}$ <sup>53</sup>. Tale test verifica l'ipotesi nulla di indipendenza delle  $\hat{L}_{M+j}$  contro l'ipotesi alternativa che le  $\hat{L}_{M+j}$  siano dipendenti e in particolare, che siano generati da una Catena di Markov del primo ordine<sup>54</sup>. Nel caso di indipendenza delle  $\hat{L}_{M+j}$  si avrà che  $P(\hat{L}_{M+j} = 1) = P(\hat{L}_{M+j} = 1 | \hat{L}_{M+j-1} = 0) = P(\hat{L}_{M+j} = 1 | \hat{L}_{M+j-1} = 1)$  ovvero la distribuzione di probabilità delle eccezioni rimane invariata indipendentemente dal fatto che nell'istante precedente si sia avuta una violazione del Var o meno. Nel caso in cui le  $\hat{L}_{M+j}$  siano state generate da una Catena di Markov<sup>55</sup>, invece tale eguaglianza non sarà più verificata ma, in generale, si avrà  $P(\hat{L}_{M+j} = 1) \neq P(\hat{L}_{M+j} = 1 | \hat{L}_{M+j-1} = 0) \neq P(\hat{L}_{M+j} = 1 | \hat{L}_{M+j-1} = 1)$ . In quest'ultimo caso la distribuzione condizionata di  $\hat{L}_{M+j}$  sarà ancora di tipo Bernulli con parametro che varia a seconda del valore delle  $\hat{L}_{M+j}$  osservato al tempo precedente  $P(\hat{L}_{M+j} = 1 | \hat{L}_{M+j-1} = s) = \alpha_{11}$ . Il sistema di ipotesi da verificare diviene quindi

---

<sup>52</sup> Haas M., (2001) New Methods in Backtesting, *Financial Engineering Research Center, Working Paper*.

<sup>53</sup> Christoffersen P., (1998) Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review*, 39, 841-862.

<sup>54</sup> Un processo stocastico a valori discreti  $X_t$  è una Catena di Markov del primo ordine se soddisfa la seguente condizione nota come Condizione di Markov:  $P(X_t = x_t | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}) = P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1})$

<sup>55</sup> Finger, C. (2005), Back to Backtesting, Research Monthly, May 2005, RiskMetrics Group.

$$\begin{cases} H_0: \alpha = \alpha_{11} = \alpha_{10} \\ H_1: \alpha_{11} \neq \alpha_{10} \end{cases}$$

Come il precedente, anche questo è un test del rapporto di verosimiglianza. Venendone però meno l'ipotesi di indipendenza delle eccezioni, la funzione di verosimiglianza va costituita in maniera differente da quanto illustrato per il test di corretta copertura marginale.

*(H3) Test di corretta copertura condizionata (conditional coverage):*

Un test rivolto a valutare la conditional coverage di un modello VaR<sup>56</sup> è stato proposto da Christoffersen (1998), il quale estende il likelihood ratio (LR) per specificare che le eccezioni devono essere fra loro serialmente indipendenti. In altri termini, affinché un modello sia caratterizzato da una corretta conditional coverage, occorre che la probabilità che si verifichi un'eccezione di un determinato giorno sia indipendente dal fatto che il giorno precedente si sia o meno verificata un'eccezione. Christoffersen parte dalla considerazione che le stime VaR<sup>57</sup> possono essere viste come stime d'intervallo, ossia come stime della coda sinistra della distribuzione di probabilità a uno specifico livello di copertura (coverage). In particolare, un modello VaR utilizza un intervallo illimitato inferiormente  $[-\infty, \text{VaR}]$ . I test<sup>58</sup> per la valutazione della bontà di un modello VaR devono dunque tenere in considerazione questa caratteristica. Al contrario, il test dell'unconditional coverage è basato su una stima puntuale. La principale differenza fra i due tipi di stima è che una stima per intervalli ha la possibilità di essere dinamica, nel senso che l'intervallo dovrebbe essere stretto in presenza di bassa volatilità e più ampio quando la volatilità cresce<sup>59</sup>. Osservazioni fuori dall'intervallo

---

<sup>56</sup> Christoffersen P., and Pelletier D., (2004) Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach, *Journal of Empirical Finance*, 2, 84-108.

<sup>57</sup> Damodaran, A. (2007), *Strategic Risk Taking: A Framework for Risk Management*, Pearson Education, New Jersey.

<sup>58</sup> Dowd, K. (2006), Retrospective Assessment of Value-at-Risk. Risk Management: A Modern Perspective, pp. 183-202, San Diego, Elsevier

<sup>59</sup> Haas, M. (2001), New Methods in Backtesting, *Financial Engineering, Research Center Caesar*, Bonn

dovrebbero così distribuirsi in modo uniforme nel campione, e non essere invece contrate. Il sistema da sottoporre a verifica è

$$\begin{cases} H_0: \alpha = \alpha_{11} = \alpha_{10} = \alpha_0 \\ H_1: \alpha_{11} \neq \alpha_{10} \end{cases}$$

che può essere ottenuto combinando l'ipotesi nulla del test di corretta copertura marginale con l'ipotesi alternativa del test di indipendenza. La statistica test<sup>60</sup> è data dal rapporto di verosimiglianza

$$CC_n = -2 [\log(L(\alpha; \hat{L}_{M+j}) - \log L(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j})] \quad \text{dove}$$

$L(\alpha; \hat{L}_{M+j})$  e  $L(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j})$  risultano pari a

$$L(\alpha; \hat{L}_{M+j}) = \alpha_0^{n_e} (1 - \alpha_0)^{n_e}$$

$$L(\hat{\alpha}; \hat{L}_{M+j}) = \hat{\alpha}_{10}^{n_{10}} (1 - \hat{\alpha}_{10})^{n_{00}} \hat{\alpha}_{11}^{n_{11}} (1 - \hat{\alpha}_{11})^{n_{01}}$$

Ne consegue che la statistica test è data da

$$CC_M = -2[n_1(\log(\alpha_0) + n_0 \log(1 - \alpha_0) - n_{10} \log(\hat{\alpha}_{10}) - n_0 \log(1 - \hat{\alpha}_{10}) - n_{11} \log(\hat{\alpha}_{11}) - n_{01} \log(1 - \hat{\alpha}_{11})]$$

<sup>61</sup>E' possibile dimostrare che, per n sufficientemente grande, sotto  $H_0$ ,  $ID_n \approx X_{(2,1-\beta)}^2$ . In generale, la metodologia di backtesting proposta da Christoffersen risulta più completa ed efficiente di quella utilizzata in precedenza. Più completa perché tiene conto del problema dell'indipendenza tra le eccezioni che il test dell'unconditional coverage non prende in considerazione. Più efficiente perché la scomposizione del test di copertura condizionale nelle sue componenti di indipendenza e di copertura non condizionale consente di evidenziare con maggiore chiarezza le cause che possono condurre al rifiuto di un particolare modello VaR.

---

<sup>60</sup> Jorion, P. (2001), Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, 2nd Edition, McGraw-Hill, United States.

<sup>61</sup> Lopez, J. (1999), Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models, *Journal of Risk* 1, 37-64.

## Capitolo II

### *Il rischio credito: una disamina della modellistica di riferimento*

#### **Introduzione**

I rischi finanziari si riferiscono a cambiamenti imprevisti e sfavorevoli del valore di mercato di determinate posizioni finanziarie, per esempio una singola obbligazione, una singola azione, una singola opzione o altri derivati, o un portafoglio di vari titoli. Il rischio di credito corrisponde a cambiamenti del rating dell'emittente del titolo o di una controparte. Per un titolo l'affidabilità del suo emittente, per esempio un governo o una società, influisce sul prezzo del titolo, poiché non è certo se l'emittente sarà in grado o meno di adempiere ai propri obblighi (cedola e capitale). Tale titolo che potrebbe essere soggetto a inadempienza è il classico esempio di un contratto in cui l'esposizione al rischio di credito deriva dal contratto stesso. Un'altra fonte di esposizione al rischio di credito è rappresentata dal rischio di inadempienza di una controparte in un contratto finanziario. Un esempio potrebbe essere una lunga durata su una opzione, che espone il suo detentore al rischio di credito del venditore dell'opzione se l'opzione è in denaro. Le tre principali variabili che influenzano il rischio di credito di un titolo finanziario sono :

- la probabilità di insolvenza (PD)
- perdita in caso di insolvenza (LGD), che equivale a un meno il tasso di recupero (RR) in caso di insolvenza;

- l'esposizione al momento dell'inadempimento (EAD).

Sebbene una notevole attenzione sia stata rivolta, da parte della letteratura sul rischio di credito, alla stima della prima componente (PD) una attenzione molto minore è stata dedicata alla stima del tasso di recupero (RR) e alla relazione tra PD e RR. In letteratura sono stati sviluppati tre diversi approcci per descrivere il rischio di credito : approccio strutturale - forma ridotta e a informazione incompleta.

Nell'approccio strutturale si fanno delle assunzioni riguardo alle dinamiche dell'attivo di un'impresa, alla sua struttura patrimoniale, al suo passivo e ai suoi azionisti. Si suppone quindi che l'impresa si inadempiente quando il suo passivo supera l'attivo. In questa situazione il passivo dell'azienda può essere considerato come una sopravvenienza passiva sull'attivo dell'impresa. Ammettendo che un'impresa può essere inadempiente ben prima della scadenza del suo debito, si potrebbe anche supporre che l'impresa possa fallire quando il valore del suo attivo ricade al di sotto di una certa soglia. Sebbene questo approccio strutturale sia attraente dal punto di vista economico, alcune proprietà del margine di credito<sup>62</sup> sono irrealistiche. Ciò è dovuto al fatto che nel quadro strutturale l'inadempienza può essere anticipata dagli investitori.

<sup>63</sup>Nell'approccio a forma ridotta, l'inadempienza non viene descritta causalmente in termini di attivo e passivo dell'impresa, ma viene supposta esogena. In questo approccio specifico, l'inadempienza si verifica in maniera del tutto inaspettata. La struttura stocastica dell'inadempienza è impostata direttamente da un processo di intensità o compensatorio. I prezzi dei titoli che potrebbero essere soggetti a inadempienza si possono rappresentare in termini di intensità o di compensazione, dando luogo a problemi di valutazione molto simili a quelli che si pongono nei modelli con struttura

---

<sup>62</sup> Si intende per margine di credito il rendimento in eccesso richiesto dagli investitori per sopportare il rischio di inadempienza del prestatore di credito.

<sup>63</sup> B. Belkin, S. Suchower, e L. R. Forest. (1998) The effect of systematic credit risk on loan portfolio value-at-risk and loan pricing. *CreditMetrics Monitor*, pp. 17-28.

default-free. A causa della imprevedibilità delle inadempienze, le proprietà del margine di credito sono plausibili.

Lo schema<sup>64</sup> a informazione incompleta offre un punto di vista comune sugli approcci strutturali e a forma ridotta per l'analisi del rischio di credito. Questa prospettiva consente di vendere i modelli di entrambi i tipi come se fossero parte di una stessa famiglia. Tale famiglia contiene ibridi strutturali a forma ridotta, alcuni dei quali portano in sé le caratteristiche migliori di entrambi gli approcci tradizionali<sup>65</sup>.

## 2.1 Modelli Strutturali

La prima categoria di modelli di rischio di credito, basata sullo schema sviluppato da Merton (1974), usa principi di valutazione delle opzioni di Black and Scholes (1973). Nel suddetto schema, il processo di insolvenza di una società è determinato dal valore dell'attivo della società stessa, e il rischio di insolvenza di una impresa è quindi espressamente correlato alla variabilità del valore dell'attivo dell'impresa stessa<sup>66</sup>. L'intuizione che sta alla base del modello di Merton è relativamente semplice: l'insolvenza si verifica quando il valore dell'attivo dell'impresa (ovvero il valore di mercato dell'impresa) è inferiore a quello dei suoi debiti. Il pagamento agli obbligazionisti al momento della scadenza del debito è dunque la più piccola delle due quantità : il valore nominale del debito oppure il valore di mercato dell'attivo dell'impresa. Ipotizzando che il debito della società sia interamente rappresentato da un'obbligazione a cedola zero<sup>67</sup>, se il valore dell'impresa al

---

<sup>64</sup> B. Belkin, S. Suchower, e L. R. Forest. (1998) A one-parameter representation of credit risk and transition matrices. *CreditMetrics Monitor*, pp. 46–56.

<sup>65</sup> T. R. Bielecki e M. Rutkowski.(2002) Credit risk: modeling, valuation and hedging. *SpringerVerlag*, New York.

<sup>66</sup> C. Bluhm, L. Overbeck, e C. Wagner. (2003) An introduction to credit risk modeling. *Chapman and Hall*, London.

<sup>67</sup> L. V. Carty e D. Lieberman (1997) Historical default rates of corporate bond issuers, 1920-1996. *Moody's Global Credit Research*.

momento della scadenza è maggiore del valore nominale dell'obbligazione, il detentore dell'obbligazione recupera il valore nominale dell'obbligazione. Tuttavia se il valore dell'impresa è inferiore al valore nominale dell'obbligazione, gli azionisti non percepiscono niente e il detentore dell'obbligazione recupera il valore di mercato dell'impresa. Il rimborso al momento della scadenza nei confronti del detentore dell'obbligazione è dunque al valore nominale dell'obbligazione meno un'opzione put sul valore dell'impresa con un prezzo di esercizio equivalente al valore nominale dell'obbligazione a una scadenza pari alla scadenza dell'obbligazione. Seguendo questa intuizione di base, Merton ha tratto una formula specifica per le obbligazioni a rischio che può essere usata sia per la stima della PD di un'impresa, sia per la stima del differenziale di rendimento tra una obbligazione a rischio e una obbligazione non gravata dal rischio di insolvenza. In aggiunta a Merton (1974), i modelli strutturali di prima generazione comprendono Black e Cox (1976), Geske (1977) e Vasicek (1984). Ciascuno di questi modelli tenta di plasmare lo schema originario di Merton eliminando una o più ipotesi ritenute irrealistiche. Black e Cox (1976) introducono la possibilità di strutture patrimoniali più complesse, con debito subordinato; Geske (1977) introduce il debito con pagamento degli interessi; Vasicek (1984) introduce la distinzione tra passività a breve termine e passività a lungo termine che attualmente rappresenta una caratteristica peculiare del modello KMV (Kealhofer, Mc-Quown e Vasicek).

In base a questi modelli<sup>68</sup>, tutti gli elementi importati del rischio di credito, tra cui l'insolvenza e il recupero al momento dell'insolvenza sono funzione delle caratteristiche strutturali dell'impresa: volatilità dell'attivo (rischio commerciale) ed effetto leva (rischio finanziario). Il tasso di recupero è quindi una variabile endogena in quanto il rimborso dei creditori è funzione del valore residuo dell'attivo della società insolvente<sup>69</sup>. Più

---

<sup>68</sup> M. Crouhy, D. Galai, e R. Mark. (2000) A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24:59–117.

<sup>69</sup> D. Duffie e K. J. Singleton. (1999) Modeling the term structure of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, 12:687–720.

precisamente, secondo il modello di Merton PD e RR tendono ad essere inversamente proporzionali. Se, ad esempio, il valore dell'impresa aumenta, il suo PD tende a diminuire mentre il tasso di recupero al momento dell'insolvenza aumenta. D'altra parte, se il debito dell'impresa aumenta, il suo PD aumenta mentre il tasso di recupero previsto al momento dell'insolvenza diminuisce. Infine se la volatilità dell'attivo dell'impresa aumenta, il suo PD aumenta mentre il tasso di recupero previsto al momento dell'insolvenza diminuisce, in quanto i possibili valori dell'attivo possono essere relativamente bassi rispetto ai livelli di passività. Sebbene la linea di ricerca che ha seguito l'approccio di Merton si sia dimostrata molto utile per lo studio degli aspetti qualitativamente importanti della misura del rischio di credito, la stessa ha avuto meno successo nelle applicazioni pratiche. E' possibile attribuire tale insuccesso a motivi diversi<sup>70</sup>.

In primo luogo, in base al modello di Merton, l'impresa è inadempiente solo alla scadenza del debito, una situazione che non trova riscontro nella realtà.

In secondo luogo, affinché il modello possa essere usato per la valutazione dei debiti da rischio di insolvenza di un'impresa con più di una classe di debito nella propria struttura patrimoniale (strutture patrimoniali complesse), si devono specificare le strutture di priorità e anzianità di vari debiti<sup>71</sup>. Inoltre, questo modello ipotizza che le regole della priorità assoluta sono effettivamente rispettate al momento dell'insolvenza, in quanto i debiti vengono rimborsati in ordine di anzianità. Tuttavia le prove empiriche di Franks e Torous (1994) indicano che le regole della priorità assoluta vengono spesso infrante. Infine, l'uso di una distribuzione lognormale nel modello di Merton (invece di una distribuzione a coda più alta) tende a sopravvalutare i tassi di recupero in caso di insolvenza.

---

<sup>70</sup> Giesecke K. (2004) Credit risk modeling and valuation: an introduction. *Working Paper, Cornell University*.

<sup>71</sup> Hu Y.T. Perraudin W. (2002) The dependence of recovery rates and defaults. Mimeo, Birkbeck College.

In risposta a tali difficoltà, è stato sviluppato un approccio alternativo, che adotta sempre il modello originario di Merton per quanto riguarda il processo di insolvenza ma, al tempo stesso, elimina uno degli assunti irrealistici di tale modello, ovvero quello secondo cui l'insolvenza può verificarsi solo alla scadenza del debito quando l'attivo dell'impresa non è più sufficiente a coprire il debito. Viceversa, si ipotizza che l'insolvenza può verificarsi in qualsiasi momento tra l'emissione e la scadenza del debito e che l'insolvenza scatta quando il valore dell'attivo dell'impresa scende al di sotto di un valore soglia. Questi modelli includono Kim et al.(1993), Hull and White (1995), Nielsen et al.(1993). In base a questi contributi, il tasso di recupero in caso di inadempienza è esogeno e indipendente dal valore dell'attivo dell'impresa. Esso viene generalmente definito come un rapporto fisso del valore del debito insoluto ed è quindi indipendente dal PD. Ad esempio Longstaff e Schwartz (1995) sostengono che, osservando la storia delle insolvenze e dei tassi di recupero per varie classi di debito di imprese paragonabili tra loro, è possibile effettuare una stima affidabile del tasso di recupero. Nei propri modelli essi tengono conto di una struttura stocastica dei tassi d'interesse e di un qualche legame tra insolvenza e tassi di interesse. Essi ritengono che questo legame tra rischio di insolvenza e tasso di interesse abbia effetti significativi sulle proprietà del margine di credito. Questo approccio semplifica la prima classe di modelli sia semplificando in termini esogeni il flusso monetario per il rischio di debito in caso di fallimento, sia semplificando il processo di fallimento: quest'ultimo si verifica quando il valore dell'attivo sottostante raggiunge un determinato limite esogeno.

Nonostante questi miglioramenti rispetto al modello originario di Merton, i modelli strutturali di seconda generazione mantengono tre difetti principali, che rappresentano le tre ragioni principali che stanno alla base delle loro relativamente modeste prestazioni empiriche.

In primo luogo, essi necessitano ancora di stime dei parametri del valore dell'attivo dell'impresa, che non è osservabile. Infatti al contrario del corso azionario della formula di Black e Scholes per la valutazione delle

opzioni equity, il valore attuale di mercato di un'impresa non è facilmente osservabile.<sup>72</sup>

In secondo luogo, i modelli strutturali non possono includere i cambiamenti di posizione finanziaria che si verificano con una certa frequenza nel caso di debiti di società a rischio di insolvenza. La maggior parte delle obbligazioni societarie subisce riduzioni del credito prima dell'effettiva insolvenza. Di conseguenza, ogni modello di rischio di credito deve tenere conto dell'incertezza legati ai cambiamenti di posizione finanziaria nonché dell'incertezza legata all'insolvenza. Infine la maggior parte dei modelli strutturali ipotizza che il valore dell'impresa sia continuo nel tempo. Conseguentemente, si può prevedere il momento dell'insolvenza subito prima che essa si verifichi e pertanto, come sostengono Duffie e Lando (2000) non vi sono brutte sorprese. In altre parole, senza ricorrere ad un jump process, il PD di un'impresa è conosciuto con ceteris paribus.

## 2.2 Modelli a forma ridotta

Il tentativo di eliminare i suddetti punti deboli dei modelli strutturali ha dato luogo a modelli a forma ridotta. Questi comprendono Litterman e Iben (1991), Madan e Unal (1995), Jarro e Turnbull (1995).

Al contrario dei modelli strutturali, i modelli a forma ridotta non mettono in relazione l'insolvenza con il valore dell'azienda, e non occorre valutare i parametri correlati al valore dell'impresa per metterli in pratica. Oltre a questo, i modelli a forma ridotta introducono assunti specifici e distinti sia sulla dinamica del PD che dell'RR<sup>73</sup>. Queste variabili vengono definite indipendentemente dalle caratteristiche strutturali dell'impresa dalla volatilità del suo attivo e dall'effetto leva. In termini generali, i modelli a forma ridotta ipotizzano un RR esogeno che è indipendente dal PD. Più precisamente, i

---

<sup>72</sup> Geske R. (1977) The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12:541–552.

<sup>73</sup> Costa M. (2001) Metodi statistici nell'analisi di variabili finanziarie. Indicatori descrittivi e modelli interpretativi. *CLUEB*, Bologna.

modelli a forma ridotta prendono come punto di partenza il comportamento dei tassi di interesse non a rischio di insolvenza, l'RR delle obbligazioni a rischio di insolvenza al momento dell'insolvenza, nonché un processo stocastico per l'intensità dell'insolvenza. In ogni momento, vi è una qualche probabilità che una impresa sia inadempiente rispetto ai propri obblighi. Sia la suddetta probabilità, sia l'RR in caso di insolvenza possono variare stocasticamente nel tempo. Tali processi stocastici determinano il prezzo del rischio di credito. Sebbene questi processi non siano apparentemente legati al valore dell'attivo dell'impresa, vi è presumibilmente una qualche relazione latente. Duffie e Singleton (1999) definiscono quindi tali approcci alternativi come modelli a forma ridotta.

I modelli a forma ridotta differiscono essenzialmente dai modelli strutturali nel grado di prevedibilità dell'insolvenza, in quanto possono tenere conto di insolvenze improvvise. Un tipico modello a forma ridotta ipotizza che una variabile casuale esogena determini l'insolvenza e che il PD in un qualsiasi intervallo di tempo sia diverso da zero. L'insolvenza si verifica quando la variabile casuale subisce un cambiamento discreto nel proprio valore. Questi modelli trattano le insolvenze come eventi di Poisson imprevedibili. Il momento nel quale avverrà il cambiamento discreto non può essere previsto sulla base delle informazioni disponibili<sup>74</sup>.

I modelli a forma ridotta differiscono per il modo in cui viene parametrizzato l'RR. Ad esempio Jarrow e Turnbull (1995) ipotizzano che al momento dell'insolvenza, un'obbligazione abbia un valore di mercato equivalente a una frazione determinata in modo esogeno di una obbligazione non a rischio insolvenza altrimenti equivalente. Duffie e Singleton (1999) hanno proseguito con un modello che, quando il valore di mercato al momento dell'insolvenza (ossia l'RR) viene determinato in modo esogeno, tiene conto di soluzioni a forma chiusa per la struttura dei margini di credito. Il loro modello tiene anche conto di un RR casuale che dipende dal valore che l'obbligazione aveva prima dell'insolvenza. Sebbene questo modello ipotizzi

---

<sup>74</sup> P. J. Crosbie. (1999) Modelling default risk. *KMV*.

un processo esogeno per la perdita attesa al momento dell'insolvenza, ovvero che l'RR non dipenda dal valore della sopravvenienza a rischio di insolvenza, esso tiene conto della relazione tra il processo legato al rischio di insolvenza e l'RR. Infatti, in questo modello sia il comportamento del PD che quello dell'RR possono dipendere da variabili specifiche dell'azienda o macroeconomiche che devono pertanto essere messe in relazione tra loro<sup>75</sup>.

Altri modelli ipotizzano che obbligazioni dello stesso emittente, anzianità e valore nominale abbiano lo stesso RR al momento dell'insolvenza, indipendentemente dalla durata rimanente dell'obbligazione. Ad esempio, Duffie (1998) ipotizza che al momento dell'insolvenza il detentore di una obbligazione avente un determinato valore nominale riceva un pagamento fisso, indipendentemente dal tasso di interesse o dalla scadenza, e la stessa frazione del valore nominale di una qualsiasi altra obbligazione avente la stessa anzianità<sup>76</sup>. Ciò consente di utilizzare i parametri di recupero basati sulle statistiche fornite da agenzie di rating quali Moody's. Jarrow et.al (1997) tengono conto anche di diverse anzianità del debito per tradurle in RR differenti per una determinata azienda. Sia Lando (1998) che Jarrow et al. (1997) utilizzano matrici di transizione per quantificare le obbligazioni a rischio di insolvenza.

Le analisi empiriche riguardanti i modelli a forma ridotta sono piuttosto limitate. Utilizzando il modello di Duffie e Singleton (1999), Duffie (1999) scopre che questi modelli hanno difficoltà nella spiegazione della struttura osservata dei margini di credito per aziende aventi qualità di rischio di credito differenti. In particolare tali modelli presentano difficoltà generando dei differenziali di rendimento relativamente piatti quando le imprese hanno un basso rischio di credito e differenziali di rendimento maggiori quando le imprese hanno un rischio di credito più elevato<sup>77</sup>.

---

<sup>75</sup> L. V. Carty e D. Lieberman. (1997) Historical default rates of corporate bond issuers, 1920-1996. *Moody's Global Credit Research*.

<sup>76</sup> A. Di Clemente e C. Romano (2004) Measuring and optimizing portfolio credit risk: a copula-based approach. *Economic Notes*, 33:325-357.

<sup>77</sup> J. Franks e W. Torous. (1994) A comparison of financial restructuring in distressed exchanges and reorganizations. *Journal of Financial Economics*, 35:349-370.

Un recente tentativo di unire i vantaggi dei modelli strutturali e quelli dei modelli a forma ridotta si può ritrovare in Zhou (2001). Questo viene effettuato definendo l'evoluzione del valore dell'impresa come un processo jump diffusion. Tale modello mette in relazione gli RR con il valore dell'impresa al momento dell'insolvenza, di modo che la variazione degli RR si genera in maniera endogena e si giustifica la relazione tra gli RR e le posizioni finanziarie riportata in Altman (1989) e Gupton et al. (2000).

### 2.3 Modelli a informazione incompleta

I modelli di credito a informazione incompleta sono stati introdotti da Duffie e Lando (2001), Giesecke (2001) e Cetin, et al. (2002). Una discussione non tecnica dei modelli a informazione incompleta si ritrova in Goldberg (2004). Alla base di tutti i modelli di credito vi sono il processo d'insolvenza crescente  $N$  e il suo compensatore  $A^\tau$ , grazie alla decomposizione di Doob-Meyer, si può isolare il compensatore dal processo d'insolvenza<sup>78</sup>. Se vi è una incertezza a breve termine riguardo all'insolvenza in qualsivoglia stato del mondo, vi sarà un processo

A che dà luogo al compensatore:

$$A^\tau_t = A_{\min(t,\tau)} = \begin{cases} At & t < \tau \\ A\tau & \text{altrimenti} \end{cases}$$

---

<sup>78</sup> Prendendo come tempo di insolvenza casuale  $\tau$ , definiamo il processo di insolvenza come:

$$N_\tau = 1_{(\tau < t)} = \begin{cases} 1 & \tau \leq t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo è un processo puntiforme con un salto dimensionale pari a uno al momento dell'insolvenza. Essendo crescente, il processo d'insolvenza ha un trend verso l'alto: la probabilità condizionata al tempo  $t$  che l'azienda sia insolvente entro il tempo  $s \geq t$  è grande almeno quanto  $N_\tau$  stesso. Un processo di questo tipo viene detto submartingala. Un processo con trend pari a zero viene detto martingala. Questo è un processo equo nel senso che il guadagno o la perdita attesa è zero. Il teorema di decomposizione di Doob – Meyer ci permette di isolare il trend verso l'alto da  $N$ . Questo risultato fondamentale mostra che esiste un processo crescente  $A^\tau$  che inizia a zero, tale che  $N - A^\tau$  diventa martingala: si veda Dellacherie e Meyer (1982). Il processo unico  $A^\tau$  controbilancia il trend l'alto in  $N$  ed è quindi spesso definito compensatore.

Il processo  $A$  viene detto trend d'insolvenza e può essere impiegato per stimare la probabilità d'insolvenza e i prezzi dei titoli sensibili al credito. Nei modelli strutturali tradizionali si può prevedere l'insolvenza. In questo caso non vi è un rischio di credito a breve termine che richiederebbe la compensazione. Allo stesso modo, il compensatore è dato dal processo d'insolvenza stesso. Nei modelli a forma ridotta si sostiene che non si può prevedere l'insolvenza; per ipotesi, vi è un rischio di credito di lungo termine. Il compensatore viene parametrizzato direttamente tramite una intensità  $\lambda$ . Il trend viene definito semplicemente come :

$$A_t = \int_0^t \lambda s ds$$

Si può quindi vedere il trend come se fosse un'intensità cumulativa d'insolvenza. In tale situazione, le dinamiche delle probabilità d'insolvenza ideali e dei prezzi dei titoli vengono estrapolate immediatamente dalle dinamiche dell'intensità esogena.

Anziché concentrarsi sull'intensità d'insolvenza e formulare ipotesi ad hoc sulle sue dinamiche, i modelli a informazione incompleta cercano di definire il trend basandosi su una definizione ideale d'insolvenza. Si offre qui una caratterizzazione endogena del trend in termini di attività e passività societarie attraverso un modello strutturale di base. Ciò funziona tuttavia solo se è in grado di modificare il modello strutturale di base in modo da comprendere il rischio di credito a breve termine. Vi sono due approcci per introdurre l'incertezza a breve termine nei modelli strutturali. Il primo è quello che tiene conto dei salti a sorpresa nel valore dell'azienda, come in Zhou (2001b), Hilberink e Rogers (2002). In questa situazione vi è sempre la possibilità che il valore dell'azienda salti al di sotto della soglia d'insolvenza, e non lo si può prevedere. Tuttavia, vi è anche la possibilità che l'azienda semplicemente si diffonda sulla soglia, come nei modelli tradizionali con processi di valore continui. In questo caso si può prevedere l'insolvenza. Quindi, a seconda dello stato del mondo, può esservi o meno un rischio di credito a breve termine. Esiste un altro approccio che assicura che l'insolvenza non può essere prevista e che, dunque, vi è un rischio di credito a breve termine in ogni stato del mondo. Questo approccio deriva da un

riesame degli assunti informativi che stanno alla base dei modelli strutturali tradizionali. In questi modelli, si afferma implicitamente che le informazioni di cui abbiamo bisogno per calibrare e gestire il modello sono di pubblico dominio. Queste informazioni comprendono il processo del valore dell'azienda con i suoi parametri, nonché la soglia d'insolvenza. Nel modello a informazione incompleta si punta sul fatto che, in realtà, le nostre informazioni su queste quantità sono imprecise. Le informazioni che abbiamo sono molto più grossolane di quanto suggeriscano i modelli strutturali tradizionali idealizzati. In concreto, ciò significa che non possiamo essere sicuri né del vero valore dell'azienda né delle esatte condizioni dell'azienda che innescherà l'insolvenza. I modelli a informazione incompleta condividono molte ottime proprietà sia dei modelli strutturali che dei modelli a forma ridotta evitandone i punti deboli. Benchè costruita su un approccio strutturale intuitivo ed economicamente significativo, l'insolvenza non può essere prevista come nei modelli strutturali tradizionali e questo ha molte conseguenze desiderabili. Innanzitutto, un modello informazione incompleta comprende un trend non banale che può essere caratterizzato in modo esplicito. Il trend può essere usato per calcolare le probabilità d'insolvenza e i prezzi dei titoli sensibili al credito attraverso formule a forma ridotta. Nei modelli strutturali tradizionali, queste apposite formule a forma ridotta non funzionano. In secondo luogo, coerentemente con le osservazioni empiriche, i prezzi dei titoli sensibili al credito crollano bruscamente ai loro valori di recupero al momento dell'insovenza. Terzo, i margini di credito a breve termine sono tipicamente limitati lontano dallo zero<sup>79</sup>.

---

<sup>79</sup> J. Hull e A. White. The impact of default risk on the prices of options and other derivatives securities. *Journal of Banking and Finance*, 19:299–322, 1995

## 2.4 Altri metodi di stima

Negli ultimi anni sono stati sviluppati diversi approcci innovativi che descrivono esplicitamente e indagano empiricamente il rapporto tra la PD e RR. Tra questi modelli vi sono quelli di Frye (2000), Jarrow (2001), Altman et al. (2001, 2004). Il modello prende spunto dall'approccio condizionato suggerito da Finger (1999) e Gordy (2000).

In questi modelli le insolvenze non sono guidate tanto da una molteplicità di parametri correlati, quanto da un singolo fattore sistematico, lo stato dell'economica. Tali modelli si basano sul presupposto che le stesse condizioni economiche che hanno fatto insorgere le insolvenze causino anche la diminuzione degli RR, ovvero che la distribuzione del recupero sia diversa nei periodi ad alta insolvenza rispetto a quelli a bassa insolvenza. Nel modello di Frye, sia la PD che l'RR dipendano dallo stato del fattore sistematico.

L'intuizione che sta alla base del modello teorico di Frye è relativamente semplice: se un mutuario è insolvente rispetto a un prestito, il recupero della banca può dipendere dal valore della garanzia collaterale sul prestito. Il valore collaterale, così come il valore di altre attività, dipende dalle condizioni economiche. Se l'economia attraversa una fase di recessione, l'RR possono diminuire mentre i tassi d'insolvenza tendono ad aumentare. Ciò dà luogo a una correlazione negativa tra tassi d'insolvenza e RR<sup>80</sup>.

Anche se il modello sviluppato originariamente da Frye (2000) implicava che il recupero si ottenesse da un'equazione che determina la garanzia reale, l'autore ha descritto il recupero in modo diretto. Ciò ha consentito di testare dal punto di vista empirico il suo modello utilizzando dati su insolvenze e recuperi tratti da dati di obbligazioni societarie americane. Più precisamente, per l'analisi empirica sono stati usati dati tratti dal database del Servizio sul Rischio d'Insolvenza di Moody's relativamente al periodo 1982 – 1997. I risultati mostrano una forte correlazione negativa

---

<sup>80</sup> E. Jokivuolle e S. Peura. (2003) A model for estimating recovery rates and collateral haircuts for bank loans. *European Financial Management*, 12:299–314.

tra i tassi di insolvenza e gli RR per le obbligazioni societarie. Queste prove sono compatibili con i dati più recenti del mercato obbligazionario americano, e indicano un aumento simultaneo dei tassi d'insolvenza e delle LGD nel periodo 1999 – 2002<sup>81</sup>. L'analisi empirica svolta da Frye consente a quest'ultimo di concludere che, in una fase di grave recessione economica, i recuperi obbligazionari potrebbero scenderne di 20 -25 punti percentuali rispetto alla media annua normale. I recuperi dei prestiti possono scendere in pari misura, ma a partire da un livello più alto.

Jarrow (2001) presenta un nuovo metodo per stimare gli RR e le PD implicite sia nei prezzi del debito che nei prezzi del capitale azionario. Come in Frye, RR e PD sono correlati e dipendono dallo stato della macroeconomia. Tuttavia, il metodo di Jarrow include esplicitamente nella procedura di stima i prezzi del capitale azionario, consentendo di identificare separatamente RR e PD e di utilizzare un set dati allargato e rilevante. Oltre a questo, il metodo include esplicitamente nella procedura di stima un premio di liquidità, considerato essenziale alla luce dell'elevata variabilità dei differenziali di rendimento tra il debito di rischio e i titoli di tesoreria americani.

Utilizzando quattro diversi set dati :

- Servizio sul rischio d'Insolvenza di Moody's per le insolvenze obbligazionarie e LGD;
- Society of Actuaries per le insolvenze da collocamento privato e LGD;
- Standard & Poor's per le insolvenze obbligazionarie e le LGD;
- Portfolio Management Data di LGD;

considerando il periodo che va dal 1970 al 1999, Carey e Gordy (2003) analizzano le misure delle LGD e la loro correlazione con i tassi di recupero. I risultati iniziali da loro ottenuti contrastano con le conclusioni di Frye (2000): le stime della correlazione tra LGD e tassi di recupero semplici sono

---

<sup>81</sup> Hamilton et al. (2001) et Altman et al. (2004) forniscono prove empiriche chiare di questo fenomeno

vicine allo zero. Carey e Gordy scoprono anche che, limitando il periodo del campione al decennio 1988 -1998 le correlazioni stimate sono vicine ai risultati di Frye (0.45 per il debito di grado anteriore e 0.8 per il debito postergato). Gli autori notano che, durante il suddetto breve periodo, la correlazione si evidenzia non tanto perché le LGD siano basse nelle annate con bassa insolvenza tra il 1993 e 1996, quanto piuttosto perché le LGD sono relativamente alte nelle annate con alta insolvenza 1990 e 1991. Concludono quindi che l'intuizione che sta alla base del modello di Frye potrebbe definire in modo non adeguato la relazione tra i tassi di recupero e le LGD. Infatti, una relazione debole oppure asimmetrica suggerisce che i tassi di recupero e le LGD possono essere influenzati da componenti diverse del ciclo economico.

Utilizzando i dati sulle obbligazioni gravate da insolvenza relativamente al periodo 1982 – 2000, che comprende le annate con insolvenza relativamente alta 1999 e 2000, Altman et al. (2004) ottengono risultati empirici che appaiano compatibili con l'intuizione di Frye : una correlazione negativa tra i tassi di insolvenza e gli RR. Tuttavia, scoprono anche che il rischio sistematico singolo (ovvero rendimento dell'economia) è meno premonitore di quanto dica il modello di Frey. I loro modelli econometrici monovariati e multivariati assegnano un ruolo chiave all'offerta di obbligazioni gravate da insolvenza (il tasso d'insolvenza) e mostrano che questa variabile, unitamente alle variabili indicative dall'entità del mercato delle obbligazioni ad alto rendimento e del ciclo economico, spiega la sostanziale proporzionalità nella varianza tra gli RR obbligazionari aggregati a tutti i livelli di anzianità e di collateralità. Essi concludono che un meccanismo microeconomico semplice basato sull'offerta e sulla domanda incide sugli RR aggregati più di quanto non faccia un modello macroeconomico basato sulla dipendenza, comune a insolvenza e recupero, dallo stato del ciclo. Nelle annate con alta insolvenza, l'offerta di titoli gravati da insolvenza tende a superare la domanda<sup>82</sup>, determinando quindi un

---

<sup>82</sup> La domanda proviene soprattutto da investitori di nicchia detti avvoltoi, che acquistano volontariamente obbligazioni in condizioni d'insolvenza. Questi investitori rappresentano un segmento relativamente piccolo e specializzato del mercato a reddito fisso.

abbassamento dei prezzi del mercato secondario. Questo, a sua volta, influenza negativamente le stime degli RR, in quanto questi vengono generalmente misurati utilizzando i prezzi delle obbligazioni subito dopo l'insolvenza.

Altman et al. (2004) sottolineano anche le implicazioni dei risultati da loro ottenuti sulla definizione del rischio di credito e sull'aspetto delle prociclicità<sup>83</sup> del fabbisogno di capitale. Per valutare l'impatto di una correlazione negativa tra d'insolvenza e RR ha sui modelli del rischio di credito, essi utilizzano le simulazioni Montecarlo su un portafoglio campione di prestiti bancari, confrontando le misure del rischio chiave (perdite attese e non attese). Essi mostrano che sia la perdita attesa che quella non attesa sono ampiamente sottostimate se si ipotizza che le PD e gli RR siano incorrelati<sup>84</sup>. Pertanto i modelli di credito che non includono correttamente la correlazione negativa tra PD e RR potrebbero condurre a riserve bancarie insufficienti e causare inutili shock ai mercati finanziari.

Per quanto concerne la prociclicità, essi mostrano come questo effetto tende a essere accentuato dalla correlazione tra DR e RR: RR bassi quando le insolvenze sono elevate amplificherebbero gli effetti ciclici. Ciò verrebbe in modo particolare nel caso del cosiddetto approccio avanzato basato sul tasso intero (IRB), nel quale le banche sono libere di stimare i propri RR e possono tendere a ritocarli al ribasso quando aumentano le insolvenze e i rating peggiorano. L'impatto del suddetto meccanismo è stato valutato anche da Resti (2002) sulla base di simulazioni nell'arco di un ventennio, utilizzando un portafoglio standar di prestiti bancari (la cui composizione viene corretta nel tempo in base alle matrici di transizione S&P). Sono emersi due risultati principali da questo esercizio di simulazione : 1) l'effetto della prociclicità è dato dalle crescite e dai declassamenti più che dai tassi d'insolvenza; in altre

---

<sup>83</sup> La prociclicità comporta la sensibilità del fabbisogno di capitale normativo ai cicli economici e del mercato finanziario. Dato che i rating e i tassi d'insolvenza rispondono al ciclo, il nuovo approccio IRB proposto dal Comitato di Basilea rischia di far aumentare gli oneri di capitale, limitando l'offerta di credito quando l'economia rallenta.

<sup>84</sup> Sia le perdite attese che le misure del VaR associate ai diversi livelli di confidenza tendono a essere sottostimate del 30% circa

parole, le correlazioni dell'offerta di credito necessarie per uniformarsi al fabbisogno di capitale sono legate in primo luogo a variazioni nella struttura delle attività ponderate, e solo in minor misura alle effettive perdite sui crediti (tranne che nelle annate con insolvenza estremamente elevata); 2) quando si consente agli RR di oscillare con i tassi d'insolvenza, l'effetto della prociclicità aumentata in maniera significativa.

Utilizzando i dati storici di Moody's sul mercato obbligazionario, Hu e Perraudin (2002) esaminano l'interdipendenza tra gli RR e i tassi di recupero. Innanzitutto, essi standardizzano i dati trimestrali sul recupero allo scopo di estrapolare la volatilità degli RR dovuta a variazioni, nel tempo, del pool dei mutuatari classificati. Gli autori riscontrano che le correlazioni tra gli RR trimestrali e i tassi di recupero per le obbligazioni emesse da debitori residenti negli USA sono 0.22 per i dati successivi al 1982 (1983 – 2000) e 0.19 per il periodo 1971 – 2000. Utilizzando la teoria del valore estremo e altre tecniche non parametriche, essi analizzano anche l'impatto di questa correlazione negativa sulle misure di VaR credito, riscontrando che l'aumento è statisticamente significativo quando i livelli di confidenza superano il 99%.

Bakschi et al. (2001)<sup>85</sup> estendono i modelli a forma ridotta per spiegare la correlazione flessibile tra i tassi a rischio nulli, la probabilità d'insolvenza e l'RR. Basandosi su prove precedenti pubblicate dalle agenzie di rating, essi individuano un'associazione negativa tra gli RR e la probabilità d'insolvenza, avvalorando tale ipotesi attraverso l'analisi di un campione di obbligazioni societarie classificate BBB: più precisamente, i risultati empirici da loro ottenuti mostrano che, in media, un peggioramento del 4% nel tasso di rischio (rischio neutrale) è associato a un calo del 1% degli RR (rischio neutrale).

Un approccio abbastanza diverso è quello proposto da Jokivuole e Peura (2003). Gli autori presentano un modello di prestiti bancari nel quale il valore collaterale è correlato con la PD. Essi utilizzano il modello di determinazione del prezzo delle opzioni per definire il debito di rischio : il valore totale del contenuto patrimoniale di un'impresa mutuataria non

---

<sup>85</sup> B. Belkin, S. Suchower, e L. R. Forest. (1998) A one-parameter representation of credit risk and transition matrices. *CreditMetrics Monitor*, pp. 46–56.

determina RR. Piuttosto, il valore collaterale viene a sua volta considerato come l'unico elemento stocastico che determina il recupero<sup>86</sup>. Ipotizzando una correlazione positiva tra il valore del contenuto patrimoniale di un'impresa e il valore collaterale, gli autori ottengono un risultato simile a quello di Fye (2000), in base al quale i tassi d'insolvenza e gli RR sono inversamente proporzionali.

Usando i dati sui prezzi osservati dei titoli gravati da insolvenza negli USA tra il 1982 e il 1999, Acharya et al. (2003) riscontrano che l'anzianità e il titolo sono importanti fatti determinanti degli RR. Anche se si tratta di un risultato non sorprendente e in linea con i precedenti studi empirici sul recupero, il secondo risultato principale da loro ottenuto è piuttosto rilevante e riguarda l'effetto delle condizioni industriali e macroeconomiche nell'annata d'insolvenza. Infatti, le condizioni dell'industria al momento dell'insolvenza sono risultate essere forti e importanti fattori determinanti degli RR. Questo risultato contrasta con quelli ottenuti da Altman et al. (2004) relativamente al fatto che non vi sono effetti delle condizioni macroeconomiche sulle condizioni dell'industria, ma coincide con essi laddove gli effetti delle condizioni dell'industria coincidono con l'inclusione di fattori macroeconomici. Acharya et al. (2003) suggeriscono che il legame, evidenziato da Altman et al. (2004), tra le variabili aggregate del mercato obbligazionario e i recuperi dovuti, come emerge, agli effetti secondari dell'offerta nei mercati obbligati segmenti possa essere una manifestazione dell'effetto industriale di Shleifer e Vishny (1992): le variabili macroeconomiche e le condizioni del mercato obbligazionario sembrano cogliere l'effetto di condizioni industriali connesse.

---

<sup>86</sup> Il modello può essere messo in pratica utilizzando una PD esogena, in modo tale che non occorra stimare i parametri del contenuto patrimoniale della società. A tale proposito, il modello combina le caratteristiche dei modelli strutturali e di quelli a forma ridotta.

### 2.4.1 I principali modelli per il rischio credito.

Dopo la disamina dello stato attuale della ricerca in capo di analisi del rischio credito, vengono proposti in sintesi i diversi modelli presenti in letteratura per il calcolo del Var, ovvero la massima perdita probabile, associata ad un dato livello di confidenza, implicata nella struttura dei crediti della banca. In letteratura i modelli proposti sono così raggruppabili:

- Approccio alla Merton: Appartengono a tale categoria il modello CreditMetrics e il modello KMV, che, nella stima del tasso di insolvenza, fanno esplicito riferimento al modello di Merton per l'analisi della struttura del capitale d'impresa;
- Approccio Econometrico: appartiene a tale categoria il modello del CreditPortfolio View,
- Approccio attuariale: rientra in tale categoria il modello CreditRisk+, che utilizza algoritmi tipici della gestione dei portafogli delle compagnie di assicurazione.

I modelli per la stima della probabilità d'insolvenza sviluppato dalla KMV<sup>87</sup>, società statunitense specializzata nell'analisi del rischio di credito, si basa sulla cosiddetta frequenza di insolvenza attesa (EDF) consta di quattro fasi distinte:

- 1- Stima del valore e della volatilità dell'attivo dell'impresa;
- 2- Calcolo della distanza di insolvenza, ossia di una misura che sintetizza il rischio di insolvenza tipico dell'impresa;
- 3- Calcolo della EDF
- 4- Calcolo dei tassi di insolvenza per un dato livello di distanza di insolvenza.

Il valore e la volatilità dell'attivo della singola impresa vengono determinati utilizzando un approccio basato sul pricing dell'opzione di Black-Scholes. Supponendo che il capitale proprio sia assimilabile a un'opzione di tipo call scritta sull'attivo dell'impresa con un livello del prezzo di esercizio

---

<sup>87</sup> Si veda P.J. Crosbie. Modeling default risk. KMV 1999

pari al valore di bilancio delle passività, è possibile applicare uno schema di prezzo, uguale al calcolo del prezzo dell'opzione, per ricavare contemporaneamente il valore e la volatilità dell'attivo dell'impresa. Se dunque i valori osservabili sono il valore azionario, la sua volatilità, la struttura del capitale e il tasso di interesse privo di rischio, risolvendo il seguente sistema di due equazioni in due incognite (dove le incognite sono il valore e la volatilità dell'attivo) si ottengono i due valori cercati:

$$\begin{cases} V_E = f(V_A, \sigma_A, SC, TI) \\ \sigma_E = f(V_A, \sigma_A, SC, TI) \end{cases}$$

dove  $V_E$  e  $\sigma_E$  rappresentano il valore azionario e la sua volatilità,  $V_A$  e  $\sigma_A$  sono il valore e la volatilità dell'attivo,  $f$  è la option function mentre  $SC$  e  $TI$  indicano rispettivamente la struttura del capitale e il tasso di interesse privo di rischio. Naturalmente questa procedura può essere applicata solo per le imprese quotate.

La misura della distanza d'insolvenza esprime una misura di rischio che lega il valore netto dell'impresa al movimento unitario della volatilità dell'attivo ed è espressa dal seguente rapporto:

$$D_{\text{Default}} = \frac{V_A - D_{\text{Poimt}}}{\sigma_A V_A}$$

dove vengono considerati il valore e la volatilità dell'attivo dell'impresa per la definizione del valore della medesima variabili in corrispondenza del quale si verifica il fallimento.

La stima del tasso di insolvenza nel modello KMV è data dalla EDF. Tale stima è derivata dal modello di Merton e sotto l'ipotesi di neutralità verso il rischio, per un orizzonte temporale  $T$ , è data:

$$\rho_T = N \left[ \frac{\log \frac{V_A}{X_T} + \left( \mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right]$$

dove  $V_A$  e  $\sigma_A$  sono il valore e la volatilità dell'attivo dell'azienda,  $\mu$  è il ritorno atteso dell'azienda di tale azienda,  $X_T$  è il valore delle passività della suddetta azienda dovute al tempo  $T$  e  $N(\cdot)$  è la cumulata della normale standard.

Fissati i diversi livelli di distanza dall'insolvenza per differenti orizzonti temporali e disponendo una collezione di dati sulle imprese e sui casi di insolvenza KMV genera una tabella che associa ad ogni livello di

$D_{Default}$  un determinato tasso di insolvenza estratto dalla EDF. Data, quindi, la storia relativa ad un ampio campione di imprese, che includa i tassi di fallimento, è possibile stimare per ogni orizzonte temporale, la proporzione di imprese insolventi per ogni categoria appartenente ad un certo livello di  $D_{Default}$ . Il servizio CreditMonitor della KMV fornisce le stime della EDF a partire dal 1993, sulla base di un campione di 100 k imprese statunitensi quotate inclusive di più di 2000 casi di insolvenza. Inoltre, la KMV fornisce le matrici di transizione costruite sulla storia dei mutamenti della EDF per un certo livello di  $D_{point}$ , ossia in funzione dei mutamenti dei tassi di insolvenza. In generale, sia la probabilità di rimanere nella stessa classe di rischiosità, sia quella di insolvenza, nello schema KMV risultano inferiori rispetto a quelle prodotte dalle agenzie di rating.

Il modello KMV ha il vantaggio di considerare sia i dati storici che quelli di mercato e, quindi, è in grado di tenere conto sia delle aspettative per futuro, insite nei dati di mercato, sia della storica trascorso, attraverso l'utilizzazione delle serie storiche dei prezzi realizzati.

**CreditMetrics:** Viene introdotto nel 1997 da J.P.Morgan è una metodologia VaR applicabile a strumenti finanziari che non sono quotati nei mercati finanziari; come i prestiti bancari e le obbligazioni private. Il modello CreditMetrics appartiene alla classe dei modelli per la misura del rischio di credito che seguono il paradigma mark-to-market, in quanto prevede che sul credito possa avvenire in risposta al deterioramento della qualità del credito, oltre che allo stato di default. In particolare, i differenti possibili livelli di rischio diversi dall'insolvenza fra i quali una singola controparte può migrare, sono identificati dalle classi di rating definite dalle principali agenzie quali Moody's o Standard & Poor's.: CreditMetrics adotta quindi una classificazione discreta dei possibili livelli di rischio. Relativamente alla modalità con cui l'andamento economico viene a riflettersi nel modello, CreditMetrics alla modalità con cui l'andamento economico viene a riflettersi nel modello, CreditMetrics può essere classificato tra i modelli non condizionali; le stime sono, infatti, basate sull'informazione storica alla quale

non vengono apportati aggiustamenti che riflettono la fase congiunturale in cui si trova l'economia.

L'insieme informativo del modello è:

- le probabilità di migrazione da una classe di rating all'altra di un prestito, tali probabilità sono desumibili dalle matrici di transizione pubblicate dalle agenzie di rating;
- i tassi di recupero in caso di insolvenza;
- i credit spreads, ovvero le differenze dei tassi di rendimento annuali tra i prestiti;
- tassi di rendimento forward
- la matrice delle correlazioni tra i prestiti.

Una matrice di transizione è una tabella che riporta la probabilità per una controparte appartenente a una data classe di rating di trovarsi in ognuna delle possibili classi di rating o di finire in uno stato di insolvenza a distanza di un certo intervallo di tempo (ad esempio un anno). Tali dati sono tipicamente calcolati analizzando anno per anno la frequenza media di emittenti in una data classe che è migrata in una classe diversa nell'anno successivo, e poi aggregando in un dato medio complessivo le frequenze di transizione riferite a ogni singolo anno. Anche i tassi di recupero in caso di insolvenza sono pubblicati dalle agenzie mentre i credit spreads e la matrice di correlazione tra i prestiti sono fornite direttamente da J.P.Morgan. Disponendo di queste informazioni il modello consente di calcolare il valore atteso, la varianza, lo scarto quadratico medio e il VaR del portafoglio<sup>88</sup>.

Supponiamo il caso di un'azienda, classificata come BBB, emetta una obbligazione privata del valore nominale di 100 milioni di euro, con cedole annuali del 6% e di durata 5 anni. Supposto inoltre che le probabilità di migrazione di tale azienda siano le seguenti :

---

<sup>88</sup> R. Geske. (1977) The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12:541–552.

**Tabella n 2.1 : Probabilità di migrazione per un'azienda di classe BBB**

<b>Rating di fine anno</b>	<b>Probabilità</b>
AAA	0.02%
AA	0.33%
A	5.95%
BBB	86.93%
BB	5.30%
B	1.17%
CCC	0.12%
Default	0.18%

Fonte: Gupton et al. (1997)

La probabilità, per questa azienda, di rimanere nella stessa classe<sup>89</sup> di rischio è pari a 86.93% quella di migrare verso classi migliori, per esempio, verso la classe AAA è pari a 0.02%, mentre la possibilità che vada incontro all'insolvenza è pari 0.18%. I flussi di cassa dell'obbligazione di classe BBB, per i primi quattro anni i flussi di cassa sono pari a sei milioni di euro, l'ultimo anno il flusso di cassa è pari a centosei milioni di euro. Secondo la logica CreditMetrics per determinare il valore dell'obbligazione alla fine dell'orizzonte temporale di riferimento (un anno secondo il metodo CreditMetrics) bisogna attualizzare questi flussi in base ad appropriati (ossia corretti per il rischio) tassi di sconto e in base ai credit spreads.

---

<sup>89</sup> S. C. Keenan, D. T. Hamilton, e A. Berthault (2000). Historical default rates of corporate bond issuers, 1920-1999. *Moody's Global Credit Research*.

**Tabella n 2.2 : Tassi di rendimento forward per quattro anni.**

<b>Classi di rating</b>	<b>Anno 1</b>	<b>Anno 2</b>	<b>Anno 3</b>	<b>Anno 4</b>
AAA	3.60%	4.17%	4.73%	5.12%
AA	3.65%	4.22%	4.78%	5.17%
A	3.72%	4.32%	4.93%	5.32%
BBB	4.10%	4.67%	5.25%	5.63%
BB	5.55%	6.02%	6.78%	7.27%
B	6.05%	7.02%	8.03%	8.52%
CCC	15.05%	15.05%	14.03%	13.52%

Fonte : Gupton et al. (1997)

I tassi di rendimento forward per i vari anni, tengono conto del rischio quindi migliore è la classe di rating dell'azienda minori sono i suddetti tassi. A questo punto occorre determinare, per ogni classe di rating, il valore attuale dei flussi di cassa indicati in precedenza, utilizzando i tassi di rendimento forward sopra indicati. Ad esempio, nel caso in cui l'azienda rimanga, alla fine dell'anno, nella classe di rating iniziale (cioè, nella classe BBB), il valore dell'obbligazione sarebbe pari a :

$$V_{BBB} = 6 + 6 / (1 + r_1 + s_1) + 6 / (1 + r_2 + s_2)^2 + 6 / (1 + r_3 + s_3)^3 + 106 / (1 + r_4 + s_4)^4$$

dove  $r_i$  con  $i = 1,2,3,4$  è il tasso di rendimento forward alla classe BBB e  $s_i$  con  $i = 1,2,3,4$  è il credit spread per la classe BBB. Per cui si ottiene

$$V_{BBB} = 6 + 6 / (1 + 0.0410) + 6 / (1 + 0.0467)^2 + 6 / (1 + 0.0525)^3 + 106 / (1 + 0.0563)^4 = 107.55$$

Eseguendo lo stesso calcolo anche per le altre classi di rating si ottengono tutti i valori che tale obbligazione può assumere alla fine del primo anno.

**Tabella n 2.3:** Valori futuri (alla fine del primo anno) in milioni di euro e relative probabilità di un'obbligazione di classe BBB.

Rating di fine anno	Valore	Probabilità
AAA	109.37	0.02%
AA	109.19	0.33%
A	108.66	5.95%
BBB	107.55	86.93%
BB	102.02	5.30%
B	98.10	1.17%
CCC	83.64	0.12%
Default	51.13	0.18%

Fonte: Gupton et. al (1997).

Nell'esempio individuato si suppone che l'obbligazione sia classificata come senior unsecured quindi il valore attuale dell'obbligazione in caso di default è 51.13 .

**Tabella n 2.4 :** Tassi di recupero per seniority class (in % del valore nominale).

Seniority class	Media (%)	Deviazione Standard (%)
Senior Secured	53.80	26.86
Senior unsecured	51.13	25.45
Senior Subordinated	38.52	23.81
Subordinated	32.74	20.18
Junior subordinated	17.09	10.09

Fonte : Gupton et al. (1997).

Considerando la distribuzione dei valori futuri assimilabile ad una variabile aleatoria discreta, otteniamo quindi il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio di tale variabile aleatoria:

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^8 p_i V_i = 107.09$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^8 p_i (V_i - \bar{V})^2 = 8.94$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^8 p_i (V_i - \bar{V})^2} = 2.99$$

dove  $i$  indica la classe di rating,  $p_i$  la probabilità di migrazione verso le classi di rating e  $V_i$  il valore dell'obbligazione. Pertanto l'obbligazione ha come valore atteso, alla fine del primo anno, un valore di 107.09 milioni di euro, con uno scarto quadratico medio di 2.99 milioni di euro. Per il calcolo del VaR, punto d'interesse, assumendo che la distribuzione di  $V_i$  sia approssimata da una normale, il VaR all'1% risulta essere  $2.33 * 2.99 = 6.97$  dove 2.33 si ottiene dalle tavole della normale standard in corrispondenza di 0.9901.

Supponiamo che il portafoglio a nostra disposizione, la struttura di affidamenti in essere su una struttura di gruppo economico, sia composto da due obbligazioni (l'obbligazione di classe BBB analizzata in precedenza e una obbligazione di classe A) per poi calcolare le statistiche descrittive e il VaR di portafoglio. Passando ora ad analizzare la seconda azienda classificata come A si ipotizza che tale azienda emetta una obbligazione privata del valore nominale di 100 milioni con cedole annuali del 5%<sup>90</sup> e di durata 3 anni. Date le probabilità di migrazione per una azienda classificata A, seguendo il metodo sopra indicato, si ottiene

---

<sup>90</sup> Gupton et. Al (1997) – J.P.Morgan's Methodology Credit Metrics in Tomasz R.,Bielecki, Merck,Ruthowski (2002) Credit Risk:Modelling, Valiation and Heading. Springer.

**Tabella n. 2.5:** Valori futuri (alla fine del primo anno) in milioni di euro e relative probabilità di un'obbligazione di classe A.

<b>Rating di fine anno</b>	<b>Valore</b>	<b>Probabilità</b>
AAA	106.59	0.09%
AA	106.49	2.27%
A	106.30	91.05%
BBB	105.64	5.52%
BB	103.15	0.74%
B	101.39	0.60%
CCC	88.1	0.01%
Default	51.13	0.06%

Fonte: Gupton et al. (1997).

Ad esempio, nel caso in cui l'azienda rimanga, alla fine dell'anno, nella classe di rating iniziale (cioè nella classe A), il valore dell'obbligazione sarebbe pari a :

$$V_A = 5 + 5 / (1 + 0.0372) + 105 / (1 + 0.0432)^2 = 106.30$$

In CreditMetrics si ipotizza che gli attivi aziendali siano finalizzati esclusivamente dal capitale azionario e seguendo il modello del valore delle attività aziendali proposto da Merton nel 1974, il default di un'azienda si verifica quando il valore delle sue attività scende al di sotto delle sue passività. Sempre seguendo la logica di Merton, in CreditMetrics, si assume che il tasso di rendimento (logaritmico) delle attività aziendali si distribuisce secondo una variabile casuale normale standard. Se si ipotizza, infatti, che sia il valore dell'attività dell'impresa la variabile che può determinare l'evoluzione del livello di rischio della singola controparte, e che la distribuzione dei rendimenti di tale variabile si normale, è possibile identificare non solo una soglia sotto la quale si verifica l'insolvenza, ma anche i livelli critici in corrispondenza dei quali si verificano i passaggi da una classe di rating all'altra. L'insolvenza si verifica per un valore inferiore alla soglia  $Z_{Def}$ , fra la soglia  $Z_{Def}$  e  $Z_{CCC}$  l'impresa avrebbe rating CCC per un

valore maggiore di  $Z_{AA}$  l'impresa avrebbe rating AAA. Le probabilità di transizione secondo il modello di Merton sono evidenziati di seguito

**Tabella n 2.6:** – Probabilità di transizione (alla fine del primo anno) per un'obbligazione di classe BBB e probabilità secondo Merton.

Rating di fine anno	Probabilità	Probabilità scondo Merton
AAA	0.02%	$1 - \phi(Z_{AA})$
AA	0.33%	$\phi(Z_{AA}) - \phi(Z_A)$
A	5.95%	$\phi(Z_A) - \phi(Z_{BBB})$
BBB	86.93%	$\phi(Z_{BBB}) - \phi(Z_{BB})$
BB	5.30%	$\phi(Z_{BB}) - \phi(Z_B)$
B	1.17%	$\phi(Z_B) - \phi(Z_{CCC})$
CCC	0.12%	$\phi(Z_{CCC}) - \phi(Z_{DEF})$
Default	0.18%	$\phi(Z_{DEF})$

Fonte: Giolli Lorenzo op.cit.

Sulla base delle evidenze di cui sopra è possibile affermare che  $0.18\% \cong \phi(Z_{DEF})$  e  $0.12\% \cong \phi(Z_{CCC}) - \phi(Z_{DEF})$ , da cui deriva che l'obbligazione (esposizione creditizia) classificabile quale BBB, il valore soglia  $Z_{Def}$  è pari a  $Z_{Def} = \phi^{-1}(0.0018) = -2.91$  a rappresentare il rendimento delle attività aziendali  $Z_{def}$ . Medesimo risultato è riscontrabile per un'azienda classificabile come CCC dove il rendimento risulta anche in questo caso negativo, infatti,  $Z_{CCC} = \phi^{-1}(0.0018 + 0.0012) = -2.75$ . Attraverso questa operatività per l'obbligazione di classe BBB sia per l'obbligazione di classe A si ottiene quanto di seguito specificato :

**Tabella n. 2.7 :** Valori di soglia dei rendimenti per l'obbligazione di classe BBB e A

<b>Soglia /Ob.BBB</b>	<b>Valore</b>	<b>Soglia /Obb. Classe A</b>	<b>Valore</b>
$Z_{AA}$	3.54	$Z_{AA}$	3.12
$Z_A$	2.78	$Z_A$	1.98
$Z_{BBB}$	1.53	$Z_{BBB}$	-1.51
$Z_{BB}$	-1.49	$Z_{BB}$	-2.30
$Z_B$	-2.18	$Z_B$	-2.72
$Z_{CCC}$	-2.75	$Z_{CCC}$	-3.19
$Z_{Def}$	-2.91	$Z_{Def}$	-3.24

Fonte: Gupton et al. (1997).

il valore soglia di  $Z_{AAA}$  in quanto ogni rendimento superiore  $Z_{AA}$  è considerato come un passaggio alla classe di rating AAA. Nel caso in cui il portafoglio è composto da due o più operazioni finanziarie (prestiti) entra in gioco un nuovo documento nel calcolo del rischio : la correlazione tra i vari prestiti. In CreditMetrics si tiene conto di tale elemento tramite la matrice delle correlazioni. Secondo il modello di Merton i rendimenti delle due obbligazioni si distribuiscono secondo una normale bivariata con matrice di varianze e covarianze  $\Sigma$ , nell'esempio si assume una correlazione tra le due obbligazioni pari a 0.3  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ . Ora è possibile calcolare le probabilità congiunte per i 64 valori del portafoglio, di seguito si specifica

**Tabella n. 2.8 :** Probabilità congiunte (alla fine del primo anno) per i 64 valori del portafoglio in percentuale. Con l'obbligazione di classe BBB sulle righe e l'obbligazione di classe A sulle colonne.

B/A		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		<b>0.09</b>	<b>2.27</b>	<b>91.05</b>	<b>5.52</b>	<b>0.74</b>	<b>0.26</b>	<b>0.01</b>	<b>0.06</b>
<b>AAA</b>	<b>0.02</b>	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>AA</b>	<b>0.33</b>	0.00	0.04	0.29	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>A</b>	<b>5.95</b>	0.02	0.39	5.44	0.08	0.01	0.00	0.00	0.00
<b>BBB</b>	<b>86.93</b>	0.07	1.81	79.69	4.55	0.5	0.19	0.01	0.04
<b>BB</b>	<b>5.30</b>	0.00	0.02	4.47	0.64	0.11	0.04	0.00	0.01
<b>B</b>	<b>1.17</b>	0.00	0.00	0.92	0.18	0.04	0.02	0.00	0.00
<b>CCC</b>	<b>0.12</b>	0.00	0.00	0.09	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00
<b>Default</b>	<b>0.18</b>	0.00	0.00	0.13	0.04	0.01	0.00	0.00	0.00

Fonte: Gupton et. Al (1997).

**Tabella n. 2.9:** Valori alla fine del primo anno di un portafoglio composto da due obbligazioni, con l'obbligazione di classe BBB sulle righe e l'obbligazione di classe A sulle colonne.

B/A		AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
		<b>106.59</b>	<b>106.49</b>	<b>106.30</b>	<b>105.64</b>	<b>103.15</b>	<b>101.39</b>	<b>88.71</b>	<b>51.13</b>
<b>AAA</b>	<b>109.37</b>	215.96	215.86	215.67	215.01	212.52	210.76	198.08	160.50
<b>AA</b>	<b>109.19</b>	215.78	215.68	215.49	214.83	212.34	210.58	197.90	160.32
<b>A</b>	<b>108.66</b>	215.25	215.15	214.96	214.30	211.81	210.05	197.37	159.79
<b>BBB</b>	<b>107.55</b>	214.14	214.04	213.85	213.19	210.70	208.94	196.26	158.68
<b>BB</b>	<b>102.02</b>	208.61	208.51	208.33	207.66	205.17	203.41	190.73	153.15
<b>B</b>	<b>98.10</b>	204.69	204.59	204.40	203.74	201.25	199.49	186.81	149.23
<b>CCC</b>	<b>83.64</b>	190.23	190.13	189.28	189.28	186.79	185.03	172.35	134.77
<b>Default</b>	<b>51.13</b>	157.72	157.62	157.43	156.77	154.28	152.52	139.84	102.36

Fonte: Gupton et. Al (1997).

Si noti che i valori di portafoglio sono dati dalla somma dei valori di riga e di colonna (ad esempio  $107.55 + 106.30 = 213.85$ ) mentre la probabilità che il rendimento dell'obbligazione di classe BBB sia compreso tra  $Z_{BB}$  e

$Z_{BBB}$  e che il rendimento dell'obbligazione di classe A sia compreso tra  $Z_{BBB}$  e  $Z_A$  è uguale a :

$$\Pr (Z_{BBB} < R < Z_{BBB} \quad Z'_{BBB} < R < Z'_A) = \int_{Z_{BBB}}^{Z_{BBB}} \int_{Z'_{BBB}}^{Z'_A} f(R, R'; \Sigma) dR dR' = 79.69\%$$

dove

$$f(R', R; \Sigma)$$

è la densità di una normale bivariata con matrice di varianze covarianze  $\Sigma$ . Se i rendimenti delle due obbligazioni sono indipendenti tale probabilità è uguale a  $86.96\% * 91.05\% = 79.15\%$  tali valori sono desumibili, rispettivamente, dalla terza riga e dalla terza colonna delle tabelle sopra indicate si ottiene quindi il valore atteso, la varianza e lo scarto quadratico medio della distribuzione di probabilità dei valori del portafoglio :

$$\bar{V} = \sum_{i=1}^{64} p_i V_i = 213.63$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{64} p_i (V_i - \bar{V})^2 = 11.22$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{64} p_i (V_i - \bar{V})^2} = 3.35$$

dove  $V_i$  rappresenta il valore del portafoglio e  $p_i$  le relative probabilità. Il VaR all' 1% risulta essere  $213.63 - 204$ .

Un ultima metodologia di congiunzione tra l'asset finanziario e creditizio risulta essere la simulazione Monte Carlo. CreditMetrics propone, un metodo basato sulla simulazione Monte Carlo che consente di ottenere risultati precisi e rapidi. Questo metodo è articolato in tre fasi :

- generazione di vari scenari che corrispondono ai possibili stati del mondo (ossia alle classi di rating dei prenditori) che possono verificarsi alla fine dell'orizzonte temporale di riferimento (un anno)
- valutazione del portafoglio in corrispondenza di ogni scenario
- sintesi dei risultati ottenuti.

Nel caso di un portafoglio composto da tre obbligazioni e dopo aver effettuato la simulazione Monte Carlo si procede al calcolo nella media, della varianza, dello scarto quadratico medio e del VaR di portafoglio. Consideriamo un portafoglio composto dalle due obbligazioni di classe BBB e classe A e da un'altra obbligazione di classe CCC con cedola annua del 6% e durata pari a due anni. Nel modello CreditMetrics, i rendimenti si distribuiscono secondo una normale standard multivariata (nel caso trivariata).

L'aspetto a favore dell'applicazione di CreditMetrics è senza dubbio la sua semplicità intuitiva e applicativa, che consente di definire un modello sufficientemente concreto per la determinazione degli effetti di correlazione a livello di portafoglio, inoltre, consente di rilevare potenzialmente i problemi di stima di parametri ricorrente, per la determinazione delle matrici di transizione, alle matrici non condizionate ricavate dai dati delle agenzie di rating. Quest'ultimo aspetto, nonostante l'evidente semplicità, introduce per il problema dell'insensibilità delle matrici di transizione al ciclo economico. Anche la metodologia di valutazione adottata, basata sui valori di mercato dell'esposizione rappresenta insieme un vantaggio ed un limite. Da una parte, sul piano teorico, essa consente di far emergere in modo elegante la differente rischiosità di operazioni a scadenza differente, in presenza di fenomeni di migrazione; d'altro canto, tuttavia, essa rappresenta una soluzione difficilmente adattabile al contesto italiano, anche per la difficoltà nel derivare correttamente la struttura degli spread per rating interno e per scadenza, che la valutazione a valori di mercato richiederebbe, senza considerare che l'utilizzo dei valori di mercato consente di applicare il modello alle sole imprese quotate.

## Capitolo III

### *Il profilo di rischio dell'investitore: la stima di un modello VaR.*

#### **Introduzione**

Le scelte di investimento compiute dai soggetti spesso divergono rispetto a quanto sostenuto dalle teorie economiche. Modelli come il *Capital Asset Pricing Model* e l'*Arbitrage Pricing Theory*, sviluppati per definire l'allocazione ottimale di risorse fra asset finanziari, partono da assunzioni molto stingenti che spesso vengono violate. L'assenza di costi di transizione ipotizzata dalla teoria, non può essere verosimilmente applicata alle situazioni reali dove la loro incidenza nel rendimento di portafoglio risulta spesso considerevole. Inoltre, quando gli individui decidono come distribuire la loro ricchezza fra le varie attività finanziarie (azioni, obbligazioni e liquidità), il loro principale obiettivo non riguarda solamente la minimizzazione del rischio e la massimizzazione del rendimento, ma è legato ad altre variabili come scopi ed esigenze personali. Una delle principali divergenze rispetto alle assunzioni dei modelli economici riguarda la diversificazione del portafoglio. Il *Capital Asset Pricing Model* e l'*Arbitrage Pricing Theory* considerano il portafoglio dei soggetti perfettamente diversificato in modo tale da permettere di mimizzare il rischio specifico del singolo investimento. In realtà, lo studio della composizione di portafoglio dimostra una scarsa diversificazione basata principalmente sull'accrescimento del numero di titoli piuttosto che sulla valutazione della loro correlazione. I soggetti seguendo

una gerarchia denominata “piramide degli investimenti”, tendono ad investire dapprima in strumenti poco rischiosi, spostando il loro interesse solo in un secondo tempo verso asset che garantiscono un rendimento maggiore in seguito ad un accrescimento del rischio. Inoltre, gran parte delle famiglie non investono in azioni dando vita ad un fenomeno chiamato *Market Participation Puzzle*. Visto il maggiore rendimento di questi titoli, le ragioni del fenomeno sono difficilmente comprensibili soprattutto quando si tratta di soggetti abbienti. Gli studi di finanza comportamentale che indagano sulle scelte di asset allocation finanziaria dimostrano che queste sono influenzate particolarmente da due elementi : la capacità di assumere rischi e l’attitudine al rischio degli investitori. La capacità di assumere rischi è legata ad aspetti oggettivi e di agevole valutazione, ad esempio, gli obiettivi di investimento peculiari del singolo e le preferenze in termini di *holding period*. Quando si parla di tolleranza al rischio, invece, ci si riferisce al modo con il quale un soggetto affronta delle situazioni di incertezza. Essendo un costrutto multidimensionale, per essere valutato necessita la considerazione di diverse variabili. Da un lato l’influenza esercitata da aspetti socio-demografici quali l’età, il genere, la professione, il reddito e il patrimonio dell’individuo; dall’altro gli aspetti personali come il titolo di studio, la *financial literacy* e l’educazione finanziaria, l’esperienza dell’investitore e le capacità cognitive. La letteratura indaga ampiamente l’influenza di questi aspetti nelle scelte di allocazione di patrimonio.

Le imprese di investimento, grazie alla Direttiva MiFID<sup>91</sup>, hanno l’obbligo di profilare i clienti attraverso un questionario per garantire loro tutela e

---

<sup>91</sup> La direttiva in questione è la **MiFID** (*Markets in Financial Instruments Directive*) del 2004/39/CE del Parlamento europeo e del Consiglio emanata il 21 Aprile del 2004. Questa direttiva costituisce un passo importante verso il miglioramento del mercato finanziario all'interno dell'Unione Europea. La direttiva è stata la risposta all'esigenza di creare in campo finanziario un terreno competitivo omogeneo tra tutti gli intermediari finanziari presenti nell'Unione europea, senza pregiudicare la protezione degli investitori. Gli obiettivi della direttiva MiFID sono i seguenti: l'integrità dei mercati; la tutela degli investitori; il rafforzamento dei meccanismi concorrenziali; il miglioramento dell'organizzazione delle imprese di investimento e una gestione più efficiente dei conflitti di interesse; l'efficienza dei mercati.

protezione rispetto ai rischi derivanti dagli investimenti finanziari. Gli aspetti indagati dal questionario MiFID<sup>92</sup> vengono messi a confronto con gli elementi che, secondo la letteratura, influenzano le scelte di investimento degli individui.

### 3.1 Capacità di assumere rischi finanziari.

Come sostenuto da Grable<sup>93</sup> e Lytton (1997), la capacità di assumere rischi finanziari viene influenzata da aspetti oggettivi del profilo del cliente. Queste determinanti vengono considerate soprattutto per quanto riguarda la formulazione delle domande presenti nel questionario MiFID, poiché esercitano un'influenza nelle scelte finanziarie dei soggetti. Tra queste è

---

La Direttiva MiFID impone alle imprese di investimento di fare una classificazione della propria clientela in modo da modulare gli obblighi informativi e le tutele da garantire. Tre sono le categorie di clienti riconosciute dalla direttiva: **Cliente professionale** (soggetti autorizzati a svolgere servizi di investimento, Governi nazionali e locali, banche, enti pubblici, le istituzioni internazionali oppure clienti al dettaglio che si sono sottoposti a valutazione da parte dell'impresa di investimento); **Cliente al dettaglio**; **Controparte qualificata** (imprese di investimento, enti creditizi e assicurativi, Governi nazionali, fondi pensione, Banche centrali e istituzioni internazionali).

<sup>92</sup> La Direttiva 2004/39/CE (MiFID livello 1) prevede che, ai fini della valutazione dell'adeguatezza, l'intermediario debba ottenere dal cliente informazioni in merito a: conoscenze ed esperienze in materia di investimenti e al tipo specifico di prodotto o servizio, alla situazione finanziaria e agli obiettivi d'investimento.

La Direttiva di attuazione 2006/73/CE (livello 2) suggerisce all'intermediario di richiedere al cliente informazioni in merito a:

- 1a) servizi/operazioni/strumenti finanziari con i quali il cliente ha dimestichezza; 1b) natura/volume/holding-period/frequenza delle operazioni realizzate; 1c) livello di istruzione e professione o, se rilevante, precedente professione.
- 2a) fonte e consistenza del reddito regolare; 2b) attività, comprese le attività liquide; 2c) investimenti e beni immobili; 2d) impegni finanziari regolari.
- 3a) periodo di tempo per il quale il cliente desidera conservare l'investimento; 3b) preferenze in materia di rischio; 3c) profilo di rischio; 3d) finalità dell'investimento.

<sup>93</sup> Grable J. E. (1997), *Investor risk tolerance: testing the efficacy of demographics as differentiating and classifying factor*, *Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University*.

necessario considerare le finalità degli individui, aspetto legato prevalentemente agli obiettivi personali di utilizzo dei rendimenti futuri. Viene richiesto agli individui di specificare la percentuale di risparmi che intendono investire e, nell'indagare fra gli obiettivi di investimento, include la reazione del rispondente ai movimenti negativi di mercato. La domanda risulta avere un problema di formulazione legato all'assenza di specificazione in merito alla posizione assunta dall'investitore. Viene incluso tra gli obiettivi del soggetto un quesito legato alla relazione fra il tenore di vita e i rendimenti di portafoglio e una domanda specifica legata alla finalità degli investimenti come impiego temporaneo di liquidità, per proteggere il capitale e vivere flussi costanti oppure per accrescere il capitale nel medio-lungo periodo.

Nella valutazione degli obiettivi è fondamentale considerare l'*holding period*, il questionario infatti chiede ai rispondenti per quanto intendono mantenere i loro investimenti. Gli aspetti personali degli individui, le loro esigenze e l'età risultano influenzare il periodo di mantenimento degli asset in portafoglio. Ad esempio se si intende investire a fini previdenziali l'orizzonte temporale di un ventenne sarà più lungo rispetto a quello di un sessantenne. L'*holding period* influenza inoltre la rischiosità degli investimenti intrapresi. Negli investimenti a breve termine infatti i soggetti hanno poco tempo per recuperare eventuali perdite da essi derivanti. Per tale ragione si intende a pilotare le loro scelte di investimento verso titoli poco rischiosi. Al contrario, se un soggetto<sup>94</sup> è disposto a mantenere l'investimento nel lungo periodo, potrà essere indirizzato verso strumenti finanziari più rischiosi perché avrà tempo a disposizione per recuperare eventuali perdite ed ottenere un maggiore rendimento.

---

<sup>94</sup> Grable J. E., JOO S. H. (1999), How to improve financial knowledge, attitudes, and behaviours, among consumer science constituencies, *The Journal of Consumer Education*, pp. 20-26.

## 3.2 Tolleranza al rischio : Aspetti socio-demografici

Molte ricerche empiriche si sono focalizzate sull'impatto degli aspetti socio demografici del profilo del cliente nelle scelte di investimento degli individui. In particolare verranno esaminati i fattori che, secondo la letteratura, sembrano influenzare maggiormente la tolleranza al rischio degli individui, determinante primaria per l'asset allocation da parte delle famiglie.

### 3.2.1 Età anagrafica

L'impatto dell'età nelle decisioni finanziarie degli individui è uno degli aspetti più studiati dalla letteratura. Molti studi empirici riscontrano l'influenza di questo aspetto anagrafico nella tolleranza al rischio dei soggetti e quindi nelle loro scelte di investimento. Un esempio è fornito dallo studio condotto da Chattopadhyay e Dasgupta (2015)<sup>95</sup> sulla realtà indiana il quale dimostra che l'età è il fattore che esercita una maggiore influenza nella propensione al rischio e quindi nelle scelte di asset allocation. Tuttavia le ragioni fornite dagli studiosi alla base di questo fenomeno spesso differiscono fra loro e meritano un'attenta valutazione. L'ipotesi di partenza degli studi empirici analizzati è che la generalità degli individui, invecchiando, preferisca detenere titoli meno rischiosi in portafoglio. Secondo lo studio condotto da Grable e Lytton (1997), la ragione che starebbe alla base di questo assunto è che gli investitori più anziani avrebbero meno tempo per coprire le eventuali perdite causate da un investimento rischioso. Gli investimenti in titoli rischiosi, infatti, verrebbero intrapresi da soggetti che giovano di un'offerta di lavoro flessibile e in grado di garantire un'assicurazione per i movimenti

---

<sup>95</sup> Chattopadhyay S., Dasgupta R. (2015), Demographic and socioeconomic impact on risk attitudes of the Indian investors-an empirical study, *Asian Economic and Financial Review*, pp. 601-623.

avversi al mercato. La possibilità di scegliere quanto lavorare spingerebbe le persone giovani ad assumersi più rischi finanziari rispetto agli anziani.

Lo studio condotto da Guiso e Jappelli (2000)<sup>96</sup> analizza la distribuzione di asset rischiosi in base all'età. Nella prima fase del ciclo di vita pochi soggetti investono in attività rischiose e il numero degli investimenti aumenta notevolmente fra i 40 e i 49 anni. La percentuale investita in asset rischiosi diminuisce man mano che i soggetti si avvicinano all'età pensionabile. La diversa partecipazione al mercato azionario da parte di soggetti appartenenti a fasce di età differenti viene giustificata dal bisogno di liquidità. Chi necessita di maggiore liquidità sarà meno propenso ad effettuare investimenti, in particolare a causa dell'alta incidenza dei costi di partecipazione nel caso di disinvestimento a breve: a titolo esemplificativo se il costo per effettuare un investimento è del 3%, il costo atteso annuale sarà 0.3% se l'asset viene mantenuto per 10 anni e 6% se viene liquidato in sei mesi. Il bisogno di liquidità<sup>97</sup> e la necessità di dover smobilizzare a breve gli investimenti finanziari è una tipica situazione degli individui giovani e degli anziani.

**Tabella 3.1:** *Partecipazione in asset finanziari rischiosi in base all'età.*

ETA'	DETENZIONE DI TITOLI FINANZIARI RISCHIOSI
Minore di 30	15.12
30-49	19.07
40-49	19.89
50-59	17.30
60-69	10.52
Uguale o maggiore di 70	6.90

Gli asset finanziari includono azioni, government bond a lungo termine, altri bond, fondi comuni d'investimento

Fonte : Guiso, Jappelli (2000)

<sup>96</sup> Guiso L., Jappelli T. (2000), Household Portfolios in Italy, Working Paper No. 43, *Centre for Studies in Economics and Finance*.

<sup>97</sup> Guiso L., Jappelli T. (2006), Information acquisition and portfolio performance, Working Paper No. 167, *Centre for Studies in Economics and Finance*.

Lo studio condotto da Lewellen, Lease e Schalarbaum (1977)<sup>98</sup> dimostra che le differenze fra fasce d'età sono molto marcate in particolare quando si tratta di investimenti a breve termine. Per gli investimenti a medio-lungo termine, le caratteristiche personali degli individui non sembrano avere influenza sulle scelte finanziarie. Lo studio giunge alla conclusione che, quando gli individui superano la fascia d'età caratterizzata da un picco positivo di guadagni (dai 45 ai 54 anni) e si avvicinano all'età del pensionamento, cambiano la composizione del loro portafoglio investendo in titoli con un livello di rischiosità inferiore.

Carrol (2000)<sup>99</sup> conclude che le diverse scelte di asset allocation degli individui siano imputabili all'esperienza accumulata in materia di investimenti nella prima fase del ciclo di vita e una successiva tendenza comune ad indirizzare le scelte di investimento verso asset più sicuri man mano che un soggetto si avvicini all'età pensionabile.

Guiso e Jappelli (2000) definiscono la grande importanza ricoperta dalle informazioni finanziarie possedute dai soggetti che li porti a compiere le loro scelte di asset allocation. In particolare viene fatto riferimento alle informazioni legate ai costi di transizione, ai rendimenti, alla volatilità e all'indice di covarianza di un titolo con gli altri. Secondo questo studio, un soggetto potrebbe non investire in un certo asset, non per decisione personale, ma perché non ne ha mai sentito parlare e quindi non ne conosce l'esistenza. Un'influenza in questo senso potrebbe essere esercitata dall'effetto esperienza che consentirebbe ai soggetti di investire con una maggiore cognizione di causa e giustificerebbe l'aumento graduale degli investimenti rischiosi durante la prima metà del ciclo di vita. La minore volontà di mantenersi aggiornati sulle informazioni finanziarie potrebbe essere una delle ragioni che inducono i soggetti, dopo il raggiungimento di una certa età, a ridurre l'ammontare di investimenti rischiosi. Gli studi appena descritti

---

<sup>98</sup> Lewellen W. G., Ronald C. L., Schlarbaum G. G. (1977), Patterns of investment strategy and behaviour among individual investor, *The Journal of Business*, pp. 296-333.

<sup>99</sup> Carrol C. D. (2000), Portfolios of the rich, Working Paper No. 7826, *National Bureau of Economic Research*.

sembrano essere d'accordo nel sostenere l'influenza dell'età nelle scelte di asset allocation degli individui.

### 3.2.2 *Reddito, occupazione e background risk.*

Secondo la teoria, un altro aspetto che influenzerebbe fortemente le scelte di asset allocation è legato al reddito degli investitori. Soggetti con un livello di reddito superiore investirebbero maggiormente in asset rischiosi poiché sarebbero in grado di affrontare economicamente le eventuali perdite legate agli investimenti finanziari. Gli individui con un basso livello di reddito, invece, disponendo di una modesta quantità di risorse finanziarie, sarebbero caratterizzati da una bassa propensione al rischio. Lo studio condotto da Haliassos e Bertaut (1995)<sup>100</sup> mette in luce gli investimenti nel mercato azionario suddivisi in fasce di reddito.

**Tabella 3.2:** Partecipazione azionaria da parte di soggetti appartenenti a diverse fasce di reddito.

Percentili di Reddito	Partecip. Azionaria (%)	Partecip. in asset non rischiosi (%)	Partecip.azionaria media (in \$)	Partecip. in asset non rischiosi media (in \$)	Soggetti che non desiderano rischio finanziario (%)
0-10	6	37	47	909	67
10-20	3	48	174	1846	70
20-30	7	52	539	3513	59
30-40	14	68	1124	7132	54
40-50	13	72	1507	5689	44
50-60	15	77	2051	8655	47
60-70	19	84	775	8530	42
70-80	26	84	4496	10155	34
80-90	30	92	4607	13809	34
90-95	44	94	14646	18143	21
95-99	55	93	48290	34549	17
99-100	78	96	567624	104466	6

<sup>100</sup> Haliassos M., Bertaut C. C. (1995), Why do so few hold stocks? *The Economic Journal*, pp. 1110-1129.

La tab. n. 3.2 mostra che l'investimento in azioni rimane inferiore al 50% per tutti i percentili di reddito superando questa soglia solo nei due percentili più alti. Se si osservano invece gli investimenti in asset non rischiosi in dollari, si può notare che assumono valori medi superiori rispetto a quelli azionari per tutti i percentili di reddito, tranne per l'ultimo. I soggetti che non desiderano assumere nessun rischio finanziario seguono un trend decrescente all'aumentare del reddito, confermando quanto sostenuto dalla teoria. Lo studio condotto da Carrol (2000) indaga sulle ragioni per cui i soggetti ricchi detengono tassi di rischio maggiori rispetto agli altri. L'analisi empirica riguarda la composizione del portafoglio di famiglie statunitensi la quale sembra essere molto diversa in base alle fasce di reddito. In particolare le famiglie con un reddito nella media hanno un portafoglio finanziario composto da conti correnti o deposito al risparmio, ai quali aggiungono generalmente gli investimenti immobiliari. Il portafoglio delle famiglie abbienti invece è molto complesso poiché investono una grande proporzione di portafoglio in asset rischiosi, ma questi riguardano principalmente le loro iniziative imprenditoriali personali. Questo studio analizza le risposte date da un campione di soggetti alla domanda "quale delle frasi seguenti rispecchia la sua volontà di assumere rischi finanziari ?" Le risposte alternative sono:

- 1- Sopportare un alto rischio finanziario con un'aspettativa di alto rendimento.
- 2- Sopportare un rischio finanziario sopra la media con un'aspettativa di rendimento sopra la media;
- 3- Sopportare un rischio finanziario medio con un'alternativa di rendimento media;
- 4- Nessuna volontà di assumersi rischio finanziario.

Vengono riportati i valori medi di risposta per l'anno 1992 e 1995 e , in corrispondenza di livelli più alti di reddito, i soggetti esprimono la volontà di assumere un maggiore rischio finanziario, confermando quanto sostenuto dalla letteratura.

L'analisi empirica di Hallahan, Faff e McKenzie (2004)<sup>101</sup> studia le risposte date da un questionario di 25 domande creato da un'azienda australiana, ProQuest, per la misurazione della tolleranza al rischio dei rispondenti. Il risultato sembra confermare che, all'aumentare del reddito, la tolleranza al rischio assume valori più alti. La relazione però non segue un trend uniformemente crescente: al livello più alto di reddito si registra una tolleranza al rischio inferiore rispetto alla fascia di reddito precedente. È stato effettuato il test di Wald<sup>102</sup> tra il penultimo e l'ultimo livello di reddito ottenendo un p-value di 0.130, dimostrando che la differenza non è statisticamente significativa. Sulla base di questo risultato, l'analisi empirica sembra confermare una relazione positiva fra reddito e propensione al rischio. La tolleranza al rischio, tuttavia, può essere influenzata anche da aspetti legati all'ambiente nel quale è inserito l'investitore, che lo espone a rischi diversi. Un importante fattore che sembra influenzare le scelte di asset allocation è legato al rischio sul reddito sostenuto dagli individui. Lo studio di Cocco, Gomes e Maenhout (2005)<sup>103</sup> indaga sul rischio di reddito, denominato anche *background risk*, il quale differisce in base al settore di impiego e al tipo di occupazione. L'influenza esercitata nelle scelte di allocazione di patrimonio, è legata al fatto che un investitore che non affronta rischio di reddito da lavoro teoricamente non avrà ragioni per impegnare risorse nel risparmio precauzionale e investire una percentuale maggiore di portafoglio di asset rischiosi. Viceversa un soggetto che è impiegato in un settore caratterizzato da alto rischio di reddito (ad esempio l'agricoltura) eviterà l'esposizione verso altre tipologie di rischi e, nella durata del ciclo di vita, non investirà mai una grande quota del suo portafoglio finanziario in titoli rischiosi. Haliassos e

---

<sup>101</sup> Hallahan T. A., Faff F. W., McKenzie M. D. (2004), An empirical investigation of personal financial risk tolerance, *Financial Services Review*, pp. 57-78.

<sup>102</sup> Barnard, G.A (1947). A review of Sequential Analysis by Abraham Wald. *Jour, Amer. Statist. Ass.*, 42, 658 – 669.

<sup>103</sup> Cocco J. F., Gomes F. J., Maenhout P. J. (2005), Consumption and portfolio choice over the life cycle, *The Review of Financial Studies*.

Bertaut (1995)<sup>104</sup> si occupano di studiare l'andamento degli investimenti azionari diretti di soggetti che sostengono rischio di disoccupazione suddivisi per fasce di reddito. Sia per quanto riguarda il rischio legato al settore che in merito al rischio legato all'occupazione, si può notare che le differenze maggiori sono presenti per bassi livelli di reddito. Come si nota nella tabella successiva, la percentuale investita in azioni dai soggetti a basso reddito che sostengono un alto rischio (sia nel settore che nell'occupazione) differisce notevolmente rispetto ai soggetti che sostengono bassi livelli di rischio. Queste differenze sono meno marcate per livelli di reddito superiori.

**Tabella 3.3:** *Partecipazione azionaria di parte di soggetti che subiscono rischio di disoccupazione diversi per fascia di reddito.*

FASCE DI REDDITO	NEL SETTORE		NELL'OCCUPAZIONE	
	BASSO	ALTO	BASSO	ALTO
Sotto a 50000	25.9	14.7	26.6	7.9
Da 50000 a 150000	44.1	46.1	54.5	15.9
Sopra 150000	78.9	*	79.5	+

\* = dato non disponibile, + = capifamiglia ad alto reddito non hanno occupazioni ad alto rischio.

Fonte: Haliassos, Bertaut (1995)

L'analisi empirica condotta da Guiso, Sapienza e Zingales (2008)<sup>105</sup> trova nel *background risk* una giustificazione alla diversa partecipazione al mercato finanziario tra nord e sud italia. Gli abitanti del sud, subendo un maggiore rischio di reddito, eviterebbero di subire ulteriori rischi legati agli investimenti finanziari. Lo studio di Jeaton e Luca (1999) dimostra che i soggetti il cui reddito proviene da progetti imprenditoriali, sopportano già un alto rischio non diversificabile legato alla loro attività che sarebbe la ragione alla base della scelta di non investire in altri asset rischiosi. Un risultato analogo è raggiunto anche da Carrol (2000), il quale dimostra che i portafogli

<sup>104</sup> Haliassos M., Bertaut C. C. (1995), Why do so few hold stocks?, *The Economic Journal*, pp. 1110-1129.

<sup>105</sup> Guiso L., Zingales L., Sapienza P. (2008), Trusting the stock market, *The Journal of Finance*.

dei soggetti con alto reddito sono caratterizzati da alto rischio ma gli investimenti riguardano principalmente le loro personali attività imprenditoriali. Altri studi empirici dimostrano che la tipologia di occupazione dell'investitore sarebbe predittiva del suo grado di tolleranza al rischio giungendo però a conclusioni differenti. L'analisi condotta da Guiso e Paiella (2008)<sup>106</sup> in un campione di 8.135 famiglie dimostra che tra i lavoratori autonomi il 17.6% sono avversi al rischio, mentre il 30% sono neutrale o amante del rischio. Al contrario, i soggetti impiegati nel settore pubblico sono al 27.9% neutrali o propensi al rischio e al 28.3% avversi al rischio. Secondo gli autori coloro che dimostrano propensione al rischio scegliendo di lavorare autonomamente sarebbero in grado di assumersi maggiori rischi finanziari rispetto a chi ricerca sicurezza nell'ambito occupazionale. Attraverso l'analisi del livello di correlazione, si dimostra che la variabile "lavoro autonomo" è negativamente correlata con la variabile "avversione al rischio" in maniera significativa, confermando la tesi sostenuta. Allo stesso modo, lo studio di Guiso e Paiella (2004)<sup>107</sup> dimostra che, quando un soggetto è avverso al rischio, la probabilità che egli sia anche un lavoratore autonomo è molto bassa. Un risultato analogo si ottiene considerando il grado di avversione al rischio degli imprenditori. Quando l'analisi viene condotta dai soggetti appartenenti al settore pubblico, la relazione con l'avversione al rischio è positiva dimostrando che gli individui che scelgono lavori più sicuri non sarebbero propensi ad intraprendere investimenti rischiosi. Questo dimostra che, non solo a livello teorico, la scelta dell'occupazione riflette la propensione al rischio degli investitori. Il reddito degli investitori viene incluso fra i requisiti del questionario MiFID di seguito analizzato.

---

<sup>106</sup> Guiso L., Paiella M. (2008), Risk aversion, wealth, and background risk, *Journal of the European Economic Association*, pp. 1109

<sup>107</sup> Guiso L., Paiella M. (2004), The role of risk aversion in predicting individual behaviour, *Banca d'Italia Temi di Discussione del Servizio Studi*.

### 3.3 Aspetti Personali.

La letteratura indaga sugli aspetti personali degli investitori in grado di influenzare le loro scelte di allocazione di patrimonio. Si tratta in particolare di considerare come determinanti dell'asset allocation il titolo di studio dei soggetti e le loro conoscenze in ambito finanziario acquisite anche grazie alla crescente attenzione per la *financial literacy*. Verranno considerate le capacità cognitive dei soggetti e l'influenza delle cosiddette "bias comportamentali", intese come una serie di comportamenti finanziari ricorrenti fra gli investitori nell'affrontare determinati problemi.

#### 3.3.1 Titolo di studio come proxy della conoscenza finanziaria.

L'influenza delle informazioni finanziarie possedute dai soggetti è una delle determinanti nelle scelte di allocazione di patrimonio degli investitori. In particolare, il titolo di studio sembra essere in grado di prevedere le informazioni finanziarie possedute da un soggetto il quale, sulla base del suo livello di educazione, dovrebbe comprendere maggiormente i rischi legati alle scelte di asset allocation. I dati empirici presentati da Guiso e Jappelli (2000) mostrano che, un aumento delle informazioni finanziarie possedute, comporta una crescita nella partecipazione al mercato finanziario e, in particolare, negli investimenti in asset rischiosi. Lo studio dimostra che, l'influenza esercitata dal livello educativo, sembra essere legata principalmente alla scelta se investire o meno in strumenti finanziari rischiosi e non sembra incidere nella quota di portafoglio ad essi dedicata. L'analisi dimostra l'influenza dell'educazione anche nella diversificazione di portafoglio, intesa come numero di asset finanziari posseduti. E' interessante presentare anche i risultati dello studio condotto da Cocco, Gomes e Maenhout (2005)<sup>108</sup> nel quale vengono rappresentate graficamente le diverse quote di investimento in azioni sulla base del livello di educazione e dell'età dei

---

<sup>108</sup> Cocco J. F., Gomes F. J., Maenhout P. J. (2005), Consumption and portfolio choice over the life cycle, The Review of Financial Studies.

soggetti. Vengono esaminate le scelte di asset allocation degli individui che non hanno frequentato la scuola superiore, che hanno frequentato la scuola superiore e , infine, che hanno frequentato il college. L'aspetto interessante messo in luce da questo studio riguarda il momento durante il ciclo di vita nel quale gli individui investono la quota massima di portafoglio in azioni: considerando un range di età dai 20 ai 100 anni, i soggetti che non hanno frequentato la scuola superiore e coloro che hanno frequentato la scuola superiore raggiungono il picco di investimento azionario a 25 anni, mentre i laureati a 35. Dai 45 anni in poi, gli investimenti si riducono per tutti i livelli di educazione. Ciononostante i soggetti che hanno frequentato l'università, una volta superati i 35 anni e per tutta la durata restante del ciclo di vita, investono maggiormente in azioni rispetto agli altri due gruppi. I soggetti con un educativo superiore, in conclusione, investono una quota maggiore di portafoglio in asset rischiosi nonostante il fatto che i loro investimenti in azioni raggiungono il loro picco massimo in un momento successivo del ciclo di vita rispetto agli altri individui. Il questionario MiFID analizzato richiede agli individui di specificare il loro titolo di studio.

La recente crescita, a livello nazionale e interazionale, dell'organizzazione di programmi volti a migliorare l'educazione economico-finanziaria dei soggetti investitori, nasce dalla sensibilità delle istituzioni pubbliche in questo ambito e dalla comprensione che, la crescente complessità dei prodotti scambiati nei mercati finanziari, richiede una serie di conoscenze delle quali gli individui devono disporre per compiere scelte di allocazione di patrimonio con cognizioni di causa. Si indaga sui principali errori compiuti dagli investitori e, in particolare, sull'appropriata ripartizione del loro patrimonio fra aree finanziarie, come ad esempio investimenti immobiliari, assicurazioni e risparmi. Molti studi dimostrano che, nell'allocazione di patrimonio, gli individui non compiono scelte di diversificazione ottimale, basandosi principalmente sull'aumento nel numero di titoli detenuti in portafoglio senza considerare il loro grado di correlazione. Lo studio condotto dimostra che la *financial literacy* consente agli investitori di migliorare solo parzialmente le loro scelte di asset allocation dal punto di vista della diversificazione di

portafoglio. Gli individui, infatti, comprendendo i benefici della diversificazione, la perseguirebbero semplicemente aumentando il numero di titoli detenuti. La *financial literacy* non consentirebbe agli investitori di mettere in pratica tecniche di diversificazione più complesse che considerino anche la correlazione degli assett posseduti. Lo studio condotto da Cavezzali, Gardenal e Rigoni (2012)<sup>109</sup> mette in luce uno dei punti critici legati all'educazione finanziaria: i soggetti che frequentano tali programmi potrebbero successivamente sovrastimare le loro conoscenze finanziarie e questo potrebbe spingerli ad assumersi rischi al di sopra delle loro reali capacità (cosiddetta *over confidence*). Il questionario MiFID, nella versione MiFID II, indaga sull'alfabetizzazione finanziaria dei rispondenti.

### **3.3.2 Esperienza in ambito finanziario**

Le teorie economiche sulle scelte di portafoglio assumono che i titoli siano perfettamente liquidi, quindi che possano essere venduti a prezzo equo ed entro un breve arco temporale, e che i soggetti possano scambiarli senza costi. In realtà gli individui sostengono costi informativi e costi di transizione per operare nel mercato finanziario. Inoltre esistono alcune classi di asset “alternative” rispetto alle forme di investimento tradizionali, le quali richiedono lunghi periodi di tempo prima di essere scambiate (cosiddetti asset illiquidi). Si tratta ad esempio di azioni di piccole imprese e investimenti in *private equity*, i quali sono catalogati tra gli investimenti finanziari più rischiosi. Buss, Uppal e Vilkov (2015) studiano l'impatto positivo dell'esperienza in ambito finanziario nelle scelte di investimento. In particolare si vuole valutare quali siano i soggetti in grado di investire in asset “alternativi”, vista la scarsa qualità e ampiezza dei dati a disposizione per la loro valutazione. Lo studio dimostra che i soggetti con esperienza in ambito finanziario investono in asset “alternativi” a differenza degli individui

---

<sup>109</sup> Cavezzali E., Rigoni U. (2012), Know your client! Investor profile and tailor-made asset allocation recommendations, *The Journal of Financial Research* pp. 137-158.

inesperti i quali preferiscono titoli liquidi come le obbligazioni e fondi azionari. Lo studio condotto da Malmendier and Nagel (2011)<sup>110</sup> riguarda l'influenza delle diverse esperienze di vita dei soggetti nella loro propensione al rischio. Viene verificato attraverso un'analisi di campione se i superiori rendimenti di portafoglio esercitano un'influenza nel rischio assunto dagli individui. I risultati dimostrano che i soggetti che hanno ottenuto maggiori rendimenti azionari in passato, sembrano essere più propensi al rischio e maggiormente incentivati ad investire una quota crescente del loro portafoglio in questi titoli. Allo stesso modo, gli individui che hanno ottenuto alti rendimenti obbligazionari investono maggiormente nel mercato obbligazionario. Nel fare questo, gli investitori sembrano dare più peso ai rendimenti recenti piuttosto che quelli realizzati in periodi passati e le loro esperienze risultano essere influenti per quanto riguarda l'attitudine al rischio. L'analisi empirica di Chattopadhyay e Dasgupta (2015)<sup>111</sup> verifica l'impatto dell'esperienza in ambito finanziario con l'avversione al rischio degli investitori dimostrando nuovamente che i soggetti che hanno ottenuto i più alti rendimenti dal mercato finanziario riducono il loro grado di avversione al rischio futuro. Il questionario MiFID considera l'esperienza in ambito finanziario nei quesiti posti ai clienti. Tuttavia gli aspetti indagati sono differenti rispetto a quanto studiato dalla letteratura. Il questionario infatti richiede ai rispondenti di esprimere da quanto tempo, con quale importo e con quale frequenza hanno investito nelle varie classi di asset. La letteratura tratta maggiormente l'influenza dei rendimenti ottenuti in passato nelle scelte di investimento attuali.

---

<sup>110</sup> Malmendier U., Nagel S. (2011), Depression Babies: Do Macroeconomic Experiences Affect Risk Taking?, *The Quarterly Journal of Economics*, pp. 373- 416.

<sup>111</sup> Chattopadhyay S., Dasgupta R. (2015), Demographic and socioeconomic impact on risk attitudes of the Indian investors-an empirical study, *Asian Economic and Financial Review*, pp. 601-623.

### 3.4 La Direttiva MiFID

Gli studi di finanza comportamentale dimostrano che le scelte di investimento degli individui spesso divergono rispetto a quanto definito dalle teorie classiche, dimostrando che quando un soggetto deve compiere una scelta finanziaria è influenzato dalle cosiddette euristiche, regole che permettono una visione semplificata della realtà per rendere un problema trattabile e affrontabile dal singolo. Questi aspetti influenzano le decisioni degli investitori giustificando la presenza di operatori finanziari che offrono servizio di consulenza. Quest'ultimo viene definito dall'art. 1 comma 5 del TUF (Testo Unico della Finanza) come l'insieme delle raccomandazioni personalizzate che vengono offerte al cliente in merito alle operazioni legate ad uno strumento finanziario, su sua richiesta o su iniziativa del prestatore di servizio.

Tenendo conto degli obiettivi di investimento, i soggetti che offrono servizio di consulenza dovrebbero essere in grado di dare consigli coerenti e orientati a massimizzare il benessere dell'individuo. L'art. 1 specifica che, perché la raccomandazione venga considerata personalizzata, deve essere formulata sulla base delle caratteristiche del cliente. Nel caso in cui venga diffusa al pubblico attraverso canali di distribuzione, alla luce di quanto espresso da questo articolo, non potrà essere considerata personalizzata. Il servizio di consulenza deve essere esercitato da soggetti autorizzati. La creazione di un terreno competitivo uniforme tra gli intermediari dell'Unione Europea volto a garantire da un lato la protezione agli investitori, in particolare a coloro con una scarsa conoscenza dei mercati finanziari, e dall'altro la libertà di svolgimento dei servizi di investimento alle imprese, è stato il principale obiettivo per l'emanazione della direttiva 2004/39/CE, conosciuta come MiFID – *Market in Financial Instruments Directive*. La Direttiva MiFID fa parte del FSAP – *Financial Services Action Plan*, atto a riorganizzare il mercato finanziario rendendolo competitivo ed integrato a livello comunitario, e ha comportato l'abrogazione a livello europeo della Direttiva 93/22/CE conosciuta come ISD – *Investment Services Directive*.

La direttiva 2006/31/CE e il Regolamento CE n.1287/2006 sono volti ad indirizzare gli Stati Membri all'implementazione della MiFID. La direttiva 2006/31/CE si occupa di posticipare al 31/01/2007 il termine per il recepimento della MiFID, inizialmente stabilito per aprile 2006.

In Italia il TUF è stato modificato il 17 settembre 2007 grazie al D.Lgs 164. Nel mese di ottobre dello stesso anno la CONSOB con le nuove disposizioni e dal primo novembre 2007 tutti gli operatori nazionali ai quali la disciplina fa riferimento sono stati tenuti ad applicare la MiFID.

### **3.4.1 *Profilatura del cliente***

Le imprese di investimento hanno la necessità di raccogliere informazioni relative ai clienti o potenziali clienti per poter comprendere appieno i loro bisogni e le loro caratteristiche. Per conoscere questi aspetti, la Direttiva MiFID richiede agli operatori finanziari di procedere con la "profilatura" o "profilazione" dei clienti, permettendo così una loro classificazione volta ad indirizzarli verso prodotti e servizi finanziari ad essi adeguati. A questo scopo i clienti vengono generalmente sottoposti ad un questionario.

Le informazioni raccolte dalle imprese di investimento o intermediari finanziari dipendono dai servizi che vengono richiesti e offerti i quali possono differire notevolmente fra loro. In particolare, accanto al servizio di consulenza e alla gestione del portafoglio, esistono altri rapporti ad esempio i servizi di collocamento, negoziazione per conto proprio oppure l'*execution only*, ossia la mera esecuzione degli ordini da parte dell'operatore finanziario. Sulla base del principio di proporzionalità, le imprese di investimento devono considerare la natura del servizio da prestare per poter raccogliere una quantità di informazioni proporzionate alla rischiosità dello stesso. Quando un cliente richiede consulenza, in particolare con riferimento a servizi molto rischiosi o a prodotti finanziari illiquidi, questo sarà tenuto a fornire una serie di informazioni più dettagliate che permettano di valutare che la situazione finanziaria sia adeguata per far fronte all'investimento in questione (per

esempio reddito fisso, reddito totale permanente o temporaneo, fonte del reddito). Allo stesso modo saranno necessarie delle informazioni più approfondite nel caso in cui un cliente voglia investire un ammontare cospicuo del suo portafoglio finanziario, rispetto al caso in cui richieda di investire un importo esiguo. La direttiva MiFID all'art.19 si occupa di specificare le informazioni che l'impresa di investimento deve acquisire e gestire lungo la durata del contratto per valutare eventuali cambiamenti nel profilo del cliente, nelle sue preferenze o necessità. L'art 19 par.4 stabilisce che, quando un'impresa di investimento effettua consulenza in materia di investimenti o gestione di portafoglio, debba ottenere informazioni in merito agli obiettivi di investimento, alle conoscenze ed esperienze passate in ambito finanziario del cliente e alla sua situazione finanziaria. La ragione alla base della raccolta di queste informazioni è permettere alle imprese di investimento di consigliare al cliente servizi di investimento e prodotti finanziari in linea con le sue caratteristiche personali.

In relazione agli obiettivi del cliente, è fondamentale che l'operatore finanziario sia a conoscenza del periodo di tempo durante il quale il singolo vuole mantenere l'investimento (*holding period*), le preferenze legate alla rischiosità dello stesso, il suo profilo di rischio, le aspettative di rendimento, le esigenze di liquidità e le sue finalità. Nonostante l'assenza di una definizione giuridica, generalmente quando si parla di preferenze in materia di rischio si fa riferimento al rapporto rischio-rendimento desiderato dall'investitore. Il profilo di rischio, invece, è legato al comportamento tenuto dal cliente in situazioni di incertezza e rischiosità. Le domande del questionario connesse agli obiettivi del cliente sono atte a cogliere le sue preferenze in merito al rapporto rischio-rendimento, a certi strumenti finanziari piuttosto che altri e al livello di perdita che egli sarebbe in grado di accettare in un certo periodo di tempo.

La situazione finanziaria viene studiata per poter valutare la capacità del soggetto di far fronte ai rischi legati agli investimenti intrapresi. Le domande presenti nel questionario riguardano la fonte del reddito e del patrimonio complessivo, la capacità di risparmio e qualsiasi debito o altro

impegno finanziario esistente. Quando un soggetto mostra la volontà di investire in prodotti molto rischiosi o illiquidi, l'impresa di investimento indagherà in maniera più approfondita sulla situazione finanziaria del singolo acquisendo informazioni anche su proprietà immobiliari e depositi bancari. Il cliente professionale viene generalmente considerato in grado di far fronte agli impegni finanziari che potrebbero essere richiesti dal suo investimento e quindi non è chiamato a fornire queste informazioni. Le domande legate alla conoscenza dell'esperienza riguardano i servizi e i prodotti con i quali il cliente ha maggior dimestichezza e familiarità, tenendo conto anche delle operazioni realizzate in passato. Vengono studiati la natura, il volume e la frequenza delle transazioni del cliente in diversi strumenti finanziari, il periodo durante il quale le transazioni sono state realizzate e il suo grado di conoscenza delle principali categorie di strumenti finanziari. Indagare in questo senso permette di valutare la comprensione del cliente in merito alla natura e alla rischiosità degli investimenti che verranno consigliati. Vengono generalmente incluse anche domande socio-demografiche legate al livello di situazione e alla sua occupazione attuale e passata, all'età e alla composizione del nucleo familiare. Anche in questo caso la banca può astenersi dal reperire queste informazioni se il cliente è professionale presumendo un livello soddisfacente di conoscenza ed esperienza. All'art.19 stabilisce che, quando vengono offerti servizi diversi rispetto alla consulenza in materia di investimenti o gestione di portafoglio, le imprese di investimento debbano raccogliere informazioni per comprendere la conoscenza e l'esperienza del cliente in merito al prodotto o servizio finanziario in questione. L'obiettivo è quello di valutare se questi ultimi sono adatti al cliente.

#### ***3.4.2 Raccolta delle informazioni.***

E'fondamentale che i clienti siano informati in modo chiaro e semplice in merito all'obiettivo del questionario, il quale è volto a fornire informazioni all'operatore finanziario per farlo agire nell'interesse del singolo raccomandando prodotti e servizi in linea con i suoi bisogni e le sue

caratteristiche. In questo modo i clienti saranno incentivati a trasmettere informazioni accurate, veritiere e complete in merito a conoscenze ed esperienze, obiettivi e situazione finanziaria. Ciononostante le risposte al questionario possono essere esposte a distorsione, legate ad esempio all'*overconfidence*, che porta un soggetto ad assumersi maggiori rischi rispetto quelli che potrebbe sostenere, o all'*underconfidence* che comporta l'effetto opposto. Inoltre la sopravvalutazione del singolo sulle sue conoscenze finanziarie porterebbe all'omissione di lacune comportando una profilatura non rappresentativa della situazione reale. Per questo vengono generalmente adottate delle domande oggettive all'interno del questionario. Un esempio è dato dalla richiesta di esplicitare gli strumenti finanziari conosciuti anziché chiedere un giudizio sul livello di conoscenza degli stessi, che comporterebbe un'autovalutazione delle proprie competenze. Allo stesso modo si potrebbe chiedere al cliente di scegliere la definizione appropriata di relazione fra rischio e rendimento o di diversificazione di portafoglio, così da valutare oggettivamente le sue conoscenze. Le imprese di investimento adottano degli strumenti per rendere la profilatura del cliente il più affidabile possibile. Un esempio è fornito da algoritmi in grado di svolgere controlli di coerenza fra le risposte date da un certo investitore. In questo modo si dovrebbero poter evidenziare possibili contraddizioni ed eventualmente contattare il cliente per risolvere queste inesattezze. E' necessario che l'impresa di investimento adotti dei sistemi in grado di conservare nel tempo informazioni adeguate ed aggiornate sui clienti. Per questo motivo è fondamentale adottare delle procedure che garantiscano e mantengano una profilatura corretta dell'investitore. Attraverso la regolamentazione interna, ogni impresa di investimento può definire autonomamente i termini per l'aggiornamento delle informazioni fornite dal cliente. Questa periodicità dipenderà principalmente da tre aspetti differenti : la categoria di clientela alla quale un soggetto appartiene, il suo profilo di rischio, le informazioni raccolte. La clientela al dettaglio, necessitando di una maggiore tutela, gioverà di un aggiornamento periodico più frequente rispetto alla clientela professionale. Lo stesso si può dire per i soggetti con un profilo di rischio più

elevato. In merito alle informazioni raccolte, l'impresa di investimento potrebbe decidere ragionevolmente di aggiornare in maniera più frequente gli obiettivi di investimento e la situazione finanziaria piuttosto che altri aspetti registrati. Gli intermediari possono prevedere in maniera autonoma il termine di validità della profilatura del cliente e durante questo periodo l'impresa di investimento può entrare in contatto con il cliente per verificare che le informazioni raccolte siano ancora valide oppure per procedere con l'aggiornamento del profilo. Andranno inoltre valutati gli eventuali considerati dall'impresa di investimento rilevanti e che rendono necessaria una modifica del profilo cliente, ad esempio il raggiungimento di una certa età oppure dell'età pensionabile.

Il questionario ha una validità di tre anni dalla sottoscrizione. Il cliente può richiedere per iscritto l'aggiornamento delle informazioni qualora esistano ragioni fondate per effettuarlo. Spetta all'impresa di investimento valutare se le modifiche da compiere siano opportune.

### ***3.4.3. Classificazione della clientela.***

La quantità e il tipo di informazioni che l'impresa di investimenti è tenuta a raccogliere dipende, non solo dal servizio offerto, ma anche dalla natura del cliente servito.

La direttiva MiFID distingue tra controparti qualificate, clientela professionale e clientela ad dettaglio. Fra le componenti qualificate definite all'art.24 par. 2 si trovano le imprese di investimento, gli enti creditizi, le imprese di assicurazioni, i fondi pensione, i governi nazionali e i loro uffici, le banche centrali e le organizzazioni sovranazionali. Questa categoria di clienti viene considerata competente in materia di investimenti quindi le informazioni che i soggetti che ne fanno parte sono tenuti a trasmettere all'operatore finanziario sono esigue.

Secondo la Direttiva, viene definito professionale il cliente che possiede esperienze, conoscenze e competenze per effettuare le opportune valutazioni in merito ai rischi legati agli investimenti finanziari, prendendo

decisioni in maniera autonoma. Si presume quindi che un cliente professionale abbia le conoscenze finanziarie adeguate per valutare le scelte di investimento e quindi la capacità finanziaria per far fronte ai rischi di investimento intrapresi. L'impresa di investimento ha l'obbligo di comunicare al cliente la sua appartenenza a questa categoria di clientela e informarlo sulla possibilità di richiedere un maggior livello di protezione. I soggetti considerati professionali, infatti, possono concordare una maggiore tutela da parte dell'impresa di investimento, ottenendo così un trattamento da cliente non professionale. Al contempo, la MiFID dà la possibilità a clienti non professionali che rispondano a determinati requisiti, di richiedere una minore tutela e protezione, permettendo loro di ottenere un trattamento analogo a quello garantito ai clienti professionali. E' necessario che il cliente rispetti almeno due dei seguenti criteri :

- Deve aver effettuato operazioni di dimensioni significative sul mercato in questione con una frequenza media di 10 operazioni al trimestre nei quattro trimestri precedenti;
- Il valore del portafoglio di strumenti finanziari, inclusi i depositi in contante e gli strumenti finanziari, deve superare 500.000 €
- Conoscenza professionale del settore finanziario.

Tuttavia l'impresa d'investimento non è autorizzata ad assecondare passivamente la richiesta del cliente ma dovrà effettuare un'attenta valutazione sulla competenza, l'esperienza e le conoscenze del soggetto attraverso un test. L'investitore dovrà dimostrare di essere in grado di prendere decisioni in merito agli investimenti da intraprendere comprendendo appieno i rischi assunti.

La direttiva MiFID considera la clientela al dettaglio (retail) come una categoria residuale : fanno parte di questo gruppo di clienti i soggetti che non appartengono alla categoria dei clienti professionali. Coloro che fanno parte della clientela al dettaglio sono gli investitori che necessitano del maggior grado di tutela e di protezione da parte dell'impresa di investimento.

#### ***3.4.4 Mappatura degli strumenti finanziari***

Oltre alla profilatura del cliente, per poter indirizzare in maniera corretta un investitore verso un prodotto finanziario adatto alle sue esigenze, è necessario che ciascuna impresa di investimento proceda con una mappatura degli strumenti finanziari, ossia una classificazione degli stessi sulla base della complessità affrontata dall'investitore nel comprenderne rischi e caratteristiche. Per effettuare una corretta mappatura vengono considerate quindi tre variabili indipendenti:

- Il rischio emittente/controparte legato alla possibilità che il merito creditizio dell'emittente o della controparte subisca variazioni;
- Il rischio di mercato ossia l'ottenimento di un rendimento diverso rispetto a quello atteso,
- Il rischio di liquidità connesso all'impossibilità di vendere un titolo in poco tempo e prezzo equo.

Nel caso di investimenti in titoli esteri viene considerato anche il rischio di cambio legato alle possibili svalutazioni della moneta estera che ridurrebbero il rendimento dell'investitore. E' necessaria inoltre una valutazione legata alla concentrazione degli investimenti da parte di un soggetto. Un grande ammontare di denaro investito in uno stesso prodotto finanziario aumenta la volatilità del portafoglio comportando un rischio elevato. Una maggiore diversificazione permette infatti di minimizzare una parte del rischio sopportato dall'investitore, il rischio idiosincratico legato al singolo investimento. Ciononostante la diversificazione non permette di eliminare il rischio aggregato, ossia la parte di rischio connessa all'andamento generale del mercato e dell'economia alla quale ciascun investimento è esposto.

### ***3.4.5 Test di adeguatezza e appropriatezza.***

Quando un'impresa di investimento offre un servizio di gestione di portafogli o servizio di consulenza è necessario procedere con una valutazione di adeguatezza. Lo scopo di questa analisi è valutare che gli strumenti finanziari raccomandati al cliente siano in linea con i suoi obiettivi e la sua situazione finanziaria. Egli deve possedere inoltre conoscenze ed esperienze adeguate che gli consentono di capire i rischi legati alle operazioni di investimento intraprese. Le caratteristiche degli investimenti, delineate grazie alla mappatura degli strumenti finanziari, verranno confrontate con gli aspetti del suo profilo. Attraverso questo sistema, l'impresa di investimento dovrebbe essere in grado di consigliare e guidare il cliente verso investimenti in linea con le sue esigenze. Per quanto riguarda il test di adeguatezza, se un soggetto si astiene dal fornire tutte le informazioni o parte di esse, l'impresa finanziaria è tenuta a non eseguire l'operazione se ritiene che il soggetto non risponda ai requisiti necessari per effettuare un certo investimento.

Quando un cliente richiede ad un'impresa di investimento servizi diversi rispetto al servizio di consulenza e di gestione di portafoglio, ad esempio servizi di collocamento, negoziazione o esecuzione di ordini per conto proprio, questa è tenuta a sottoporre ad un test di appropriatezza. Quest'ultimo volto a verificare le conoscenze del cliente in merito agli strumenti finanziari e la comprensione del loro rischio. A differenza del test di adeguatezza, nel caso in cui il soggetto investitore non fornisca tutte le informazioni richieste dall'impresa di investimento oppure non venisse ritenuto adeguato all'investimento che intende intraprendere, verrà avvertito ma potrà ugualmente realizzare l'operazione se lo riterrà opportuno. Sarà necessario che il soggetto si assuma le responsabilità legate alle operazioni da svolgere sottoscrivendo un apposito documento.

### 3.5 Criticità della profilatura MiFID.

La direttiva MiFID lascia ampia libertà nell'elaborazione del contenuto dei questionari a ciascuna impresa di investimento. Lo studio di Marinelli e Mazzoli avanza molte critiche legate alla capacità dei questionari di rispondere alle esigenze delle imprese di investimento di profilatura corretta e univoca del cliente per rispondere all'obiettivo di offrire prodotti e servizi in linea con le sue necessità. Mettendo a confronto 14 questionari lo studio dimostra un'ampia diversità nel numero di domande sottoposte ai clienti (con una numerosità minima di 8 e massima di 37), sottolineando inoltre un'insufficienza fra le alternative di risposta. Le differenze riguardano anche il grado di investigazione dei temi affrontati. Se la direttiva MiFID consiglia una ripartizione proporzionata fra gli aspetti del profilo del cliente da approfondire, i questionari esaminati sembrano analizzare in maniera preferenziale certi punti piuttosto che altri. In particolare viene data molta attenzione alle preferenze in merito all'assunzione di rischi da parte dei soggetti. Questo viene legato principalmente alle caratteristiche di rischio-rendimento che un individuo intende accettare e viene chiamato "rischio oggettivo". Si fa riferimento, in tal senso, all'*holding period* e agli obiettivi di investimento dei clienti.

Non viene indagato a sufficienza il profilo di rischio degli investitori, cioè il modo nel quale un soggetto reagisce alle situazioni rischiose. Questo aspetto è legato principalmente alla personalità del cliente. Solo quattro questionari analizzano il profilo di rischio chiedendo al soggetto quale comportamento terrebbe in un'ipotetica situazione caratterizzata da incertezza. In merito alla capacità finanziaria vengono proposte domande legate principalmente alla fonte e all'ammontare del reddito, agli investimenti e proprietà immobiliari. Nonostante l'omogeneità che caratterizza questa sezione, l'aspetto meno indagato riguarda la composizione del portafoglio finanziario e gli impegni finanziari. Infine per quanto riguarda le conoscenze e le esperienze in materia di investimento, tutti i questionari presentano gli iter in grado di raccogliere informazioni legate alla natura, al volume e alla frequenza delle

transazioni e al tipo di strumenti finanziari conosciuti. Tuttavia solo un'impresa di investimento richiede il periodo durante il quale sono state effettuate operazioni dal cliente.

Grazie all'analisi empirica, lo studio dimostra che i questionari di diverse imprese finanziarie sottoposti allo stesso cliente darebbero risultati differenti sulla propensione al rischio comportando quindi dei consigli diversi in merito agli investimenti da intraprendere. Questo dimostra che talvolta l'utilizzo di questo mezzo può portare a profilature non rappresentative della situazione reale del soggetto e quindi a risultati non in linea con gli obiettivi della Direttiva MiFID.

### **3.6 MiFID 2**

La Direttiva 2014/65/CE, cosiddetta MiFID 2, e il Regolamento n. 600/2014/EU, cosiddetto MiFIR, sono stati pubblicati in data 12 giugno 2014 con l'obiettivo di rivedere e modificare la disciplina europea in tema di mercati finanziari e servizi di investimento. Il legislatore comunitario attraverso la Direttiva MiFID 2 ricalca in parte gli obiettivi della Direttiva 2004/39/CE, garantendo ampia tutela, un maggior grado di protezione all'investitore e facendo in modo che gli strumenti finanziari consigliati siano in linea con le sue esigenze e caratteristiche personali. Rispetto alla MiFID fa riferimento ad un maggior numero di attori del mercato finanziario e garantisce agli intermediari una certa autonomia nell'offrire servizio di consulenza. Tra gli obiettivi della Direttiva MiFID 2 c'è il miglioramento del funzionamento del mercato di capitali al fine di renderli più sicuri e recuperare la fiducia degli investitori minacciata dalla crisi finanziaria. La Direttiva sarà applicata anche a nuovi servizi di investimento, in particolare ad una piattaforma di negoziazione denominata OTF – *Organised Trading Facilities*, la quale permetterà l'incontro di domanda e offerta di strumenti finanziari. La definizione fornita dal legislatore è ampia e volta ad includere tutte le piattaforme che non possiedono struttura definita e che non sono sottoposte alla stessa disciplina dei mercati regolamentati e dei sistemi

multilaterali di negoziazione gestiti da un'impresa di investimento o da società di gestione di mercati regolamentati.

La tutela offerta agli investitori garantita da MiFID2 è rafforzata rispetto alla Direttiva 2004/39/CE le imprese di investimento dovranno attenersi a regole più severe, garantendo ai soggetti la vendita di prodotti effettivamente in linea con le loro esigenze. Vengono quindi definiti metodi di valutazione di adeguatezza e appropriatezza più stringenti. A tale scopo, la Direttiva presenta delle novità anche per quanto riguarda la classificazione della clientela. Viene data maggiore protezione agli enti locali i quali non saranno classificati direttamente come clienti professionali ma dovranno dimostrare di avere gli opportuni requisiti di esperienza e competenza.

La Direttiva 2014/65/CE dà particolare attenzione all'informativa precontrattuale dove l'intermediario tenuto a fornire informazioni in merito al tipo di consulenza prestata, agli strumenti finanziari che verranno presentati e che potranno essere consigliati al cliente.

Il recepimento della Direttiva 2014/65/UE e il Regolamento UE/600/2014 da parte degli Stati membri è previsto entro il 3 gennaio 2018. La scadenza precedentemente fissata entro il 2017 è stata considerata troppo ravvicinata vista la complessività della Disciplina MiFIDII.

### ***3.6.1 Principi e profili innovativi della MiFID II***

Con la MiFID II si è venuta ad ampliare la portata della MiFID trovando applicazione agli strumenti e alle operazioni che prima sfuggivano ad una puntuale regolamentazione, l'obiettivo dichiarato è quello di garantire che tutte le negoziazioni, che prima avvenivano al di fuori delle sedi regolamentate, adesso sono riconducibili ad una sede regolamentata, attraverso questo modo di operare sarà possibile estendere tutte le norme a tutela della trasparenza e quindi degli investitori.

Tale processo che vede come protagonisti i Mercati Regolamentati e le sedi di negoziazione secondarie, che ha avuto il suo *incipit* con la Direttiva 2004/39/CE sarà coadiuvato da una serie di norme che incrementeranno

l'integrità e la trasparenza nelle varie *trading venues*, cercando di evitare la nascita di nuovi mercati regolamentati che possono eludere le disposizioni normative e quindi non sottostare ai doveri di trasparenza a tutela degli investitori.

Sarà estesa la trasparenza pre e post trading laddove prima non era prevista ad esempio a prodotti finanziari quali le obbligazioni, i derivati e i prodotti strutturati, per poter effettuare una valutazione più generale dello strumento (e dell'emittente) che riguardi le varie piattaforme sui cui lo stesso è quotato, saranno previsti dei sistemi per il consolidamento dei dati di post trading a livello Europeo e di cooperazione a livello di gestori delle varie *trading venue*, con l'espreso obiettivo di migliorare il processo di circolarità delle informazioni del meccanismo di formazione dei prezzi, la c.d. *price discovery*. In merito alla *price discovery* è importante sottolineare come tale meccanismo debba essere il più uniforme possibile all'interno dell'Unione Europea, infatti tutte le norme attinenti alla trasparenza sono passate dalla MiFID alla MiFIR, così facendo tale corpo normativo è costante, coerente e direttamente applicabile in ogni paese membro, riducendo ai minimi termini ogni possibile discrezionalità.

### **3.7 Il Var e il profilo di rischio del cliente : definizione del modello**

Uno dei principali obiettivi primari della normativa sopra approfondita è rappresentata dalla tutela della clientela, che si è tradotta in un nuovo schema di classificazione, nonché in nuove disposizioni che, a seconda dei servizi forniti, portino ad una conoscenza mirata delle caratteristiche e delle necessità del cliente. Nello specifico, la normativa prevede determinati criteri in base ai quali i clienti dell'impresa di investimento devono essere inseriti – in base alla propria natura e alle proprie caratteristiche – in una o in un'altra categoria. Di conseguenza l'applicazione della disciplina sulle regole di condotta per gli intermediari, come del resto altre discipline, dovrà essere modulata in funzione della categoria di clientela nei confronti della quale l'impresa di investimenti presta il servizio. Al fine

di elevare il livello di tutela per la clientela, la banca si impegna a garantire un'adeguata reportistica con riferimento ai servizi di investimento prestati. In particolare, nel rispetto delle tempistiche stabilite dalla normativa di riferimento, vengono inviati ai clienti report informativi. Con specifico riferimento ai report riguardanti l'esecuzione di ordini connessi ai servizi di negoziazione e di raccolta ordini, la banca prevede di:

- Fornire una pronta comunicazione al cliente, contenente informazioni essenziali riguardanti l'esecuzione dell'ordine;
- Nel caso di cliente al dettaglio, la consegna della nota di conferma dell'esecuzione dell'ordine, entro il giorno lavorativo seguente presso la succursale ove è stato impartito l'ordine.

Il set dati considerato vede le movimentazioni dei principali titoli in portafoglio dei correntisti di una Banca di Credito Cooperativo Campana. Il periodo considerato va dal 01/01/2016 al 16/09/2016. In base alla frequenza di operazioni effettuate vengono identificate tre posizioni rappresentative dei tre profili di rischio definiti a seguito del processo di profilazione del cliente precedentemente argomentato.

Nello specifico:

- Rischio Basso : Posizione storicamente iscritta nelle anagrafiche dell'istituto per un periodo superiore a 10 anni. Dipendente di azienda privata. Preparazione di Medio Superiore in attività finanziaria. Il totale del capitale investito 30.000 € gestito in n. 15 operazioni di portafoglio così distribuite : 9 operazioni di acquisto e 4 operazioni di vendita. Numero di titoli posseduti in portafoglio : n.2 \_ Unicredit e Mediolanum.
- Rischio Medio : Posizione iscritta da più di 5 anni nelle anagrafiche dell'istituto. Dipendente Pubblico, profilo finanziariamente diversificato, non risultano presenti fenomeni di concentrazione di capitale in prodotti di risparmio interni dell'istituto o di terzi. Preparazione Medio Superiore in attività finanziaria. Il totale del capitale investito 25.000 € gestito in n. 36 operazioni di portafoglio

così distribuite : 16 operazioni di acquisto e 20 operazioni di vendita.

Numero di titoli posseduti in portafoglio: n.2 \_ Unicredit ed Enel

- Rischio Alto: Posizione iscritta da meno di 5 anni nelle anagrafiche dell'istituto. Libero professionista esperto del settore finanziario, profilo diversificato, non risultano presenti fenomeni di concentrazione di capitale in prodotti di risparmio interni dell'istituto o di terzi. Il totale del capitale investito 80.000 € gestito in n. 196 operazioni di portafoglio così distribuite : 110 operazioni di acquisto e 86 operazioni di vendita. Numero di titoli posseduti in portafoglio : n.5 \_ Mps, Saipem, Unicredit, Fincantieri, Ubi.

Le stime sono effettuate con il software econometrico R utilizzando il pacchetto “rugarch”<sup>112</sup> e “highfrequency”<sup>113</sup>. Identificato il percorso dei dati oggetto d’analisi si procede al caricamento dei dati utilizzati calcolando i relativi rendimenti giornalieri dei diversi titoli in portafoglio, questo per il profilo di rischio Basso e Medio. Il codice R da utilizzare a riguardo è il seguente :

```
> db<-read.csv(file=
+ "Rischiobasso.txt",
+ header = T,
+ sep = "\t",
+ dec = ",")
> Date_db<-strptime(db[,1], "%d/%m/%Y",tz="GMT")
> db_i<-as.xts(db[,2:5],Date_db)
> daily_ret_1<-makeReturns(db_i$p1)
> daily_ret_2<-makeReturns(db_i$p2)
> db_ii<-data.frame(db_i,daily_ret_1=daily_ret_1,daily_ret_2=daily_ret_2)
> db_ii<-as.xts(db_ii,Date_db)
```

---

<sup>112</sup> Ghalanos A. (2014). Introduction to the rugarch package. *The Comprehensive R Archive Network*.

<sup>113</sup> Boudt K.,Cornelissen J.,Payseur S. Highfrequency:Toolkit for the analysis of highfrequency financial data in R.

Il modello DCC (Dynamic Conditional Correlation) può essere stimato con una procedura a due passi, dove il primo passo è la stima di un modello GARCH univariato per ogni serie di residui, nel secondo passo, i residui, trasformati dalla loro deviazione standard stimata durante il primo passo, sono usati per stimare i parametri della correlazione condizionata.

Il codice R utilizzato a riguardo è il seguente:

```
> garch11.spec = ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0,0)),
+                           variance.model = list(garchOrder = c(1,1),
+                                                 model = "sGARCH"),
+                           distribution.model = "norm")
# dcc specification - GARCH(1,1) for conditional correlations
> dcc.garch11.spec = dccspec(uspec = multispec( replicate(2, garch11.spec) ),
+                            dccOrder = c(1,1),
+                            distribution = "mvnorm")
```

Tra i diversi metodi di stima proposti in letteratura, viene utilizzato il metodo parametrico identificato dal modello della matrice di Var/Cov, definita dal seguente codice R:

```
> fit <- dccfit(spec = dcc.garch11.spec, db_ii[,5:6])
> H_t <- fit@mfit$H
```

Definito il modello e il metodo di stima viene stimata la misura di rischio del VaR considerando un livello di confidenza del 5%, utilizzando i seguenti codici R:

```
> VaR_t <- list()
> for(t in 1:dim(H_t)[3]){
+ VaR_t[[t]] <- qnorm(0.05) * (db_ii[t,1:2] %>% H_t[,t] %>% t(db_ii[t,1:2]))^0.5 }
> VaR_t <- unlist(VaR_t)
> rend_port <- list()
> for(t in 1:dim(H_t)[3]){
+ rend_port[[t]] <- db_ii[t,1:2] %>% t(db_ii[t,5:6]) }
> rend_port <- unlist(rend_port)
```

A differenza di quanto definito per il profilo basso e medio, vengono apportate delle modifiche per il calcolo del VaR sul profilo di rischio alto. Il portafoglio di quest'ultimo risulta, a differenza dei precedenti, composto da cinque titoli, pertanto la struttura della matrice var/cov alla base della stima

del modello viene a modificarsi. Di seguito le modifiche apportate (indicate in grassetto) ai codici R utilizzati per i primi due profili:

```

> Date_db<-strptime(db[,1], "%d/%m/%Y",tz="GMT")
> db_i<-as.xts(db[,2:11],Date_db)
> daily_ret_1<-makeReturns(db_i$p1)
> daily_ret_2<-makeReturns(db_i$p2)
> daily_ret_3<-makeReturns(db_i$p3)
> daily_ret_4<-makeReturns(db_i$p4)
>daily_ret_5<-makeReturns(db_i$p5)
db_ii<data.frame(db_i,daily_ret_1=**daily_ret_1,daily_ret_2=daily_ret_2,daily_ret
_3=daily_ret_3,daily_ret_4=daily_ret_4,daily_ret_5=daily_ret_5)
> db_ii<-as.xts(db_ii,Date_db)
> garch11.spec = ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(0,0)),
+ variance.model = list(garchOrder = c(1,1),
+ model = "sGARCH"),
+ distribution.model = "norm")
> # dcc specification - GARCH(1,1) for conditional correlations
> dcc.garch11.spec = dccspec(uspec = multispec( replicate(5, garch11.spec) ),
+ dccOrder = c(1,1),
+ distribution = "mvnorm")
> fit <- dccfit(spec = dcc.garch11.spec, db_ii[,11:15] )
> H_t<-fit@mfit$H
> VaR_t<-list()
> for(t in 5:dim(H_t)[3]){
+ VaR_t[[t]]<-qnorm(0.05)* (db_ii[t,1:5]**%*%H_t[,t]**%*%(db_ii[t,1:5]))^0.5 }
> VaR_t<-unlist(VaR_t)
> rend_port<-list()
> for(t in 5:dim(H_t)[3]){
+ rend_port[[t]]<-db_ii[t,1:5]**%*%t(db_ii[t,11:15]) }
> rend_port<-unlist(rend_port)

```

Al fine di valutare l'attendibilità dei risultati ottenuti, vengono utilizzati UC Test (Unconditional Coverage Test) e CC Test (Conditional Coverage Test) attraverso i seguenti codici R:

```

UC_test <- VaRTest(alpha = 0.05, actual=rend_port, VaR=VaR_t)
pvalue UC_Test<- VaRTest(alpha = 0.05, actual=rend_port, VaR=VaR_t)$uc.LRp

```

```

CC_test <- function(ret, VaR_hat) { CC_pvalues <- 1 - pchisq( Ind_test(ret, VaR_hat) +
VaRTest(0.05, ret, VaR_hat) $uc.LRstat # uncond. test test statistic, df = 1)
, df = 2)
return(CC_pvalues) }
CC_test(rend_port, VaR_t)

```

**Tabella 3.4. :** Sintesi dei principali risultati

	Rischio Basso	Rischio Medio	Rischio Alto
expected.exceed	9	9	8
actual.exceed	9	7	8
actual.exceed/n.os	4%	3%	3%
uc.H0	C.E. *	C.E.	C.E.
uc.LRstat	0.00029	0.528392	0.0886748
uc.critical	3.84145	3.84146	3.84145
uc.Decision	**F.R. H0	F.R. H0	F.R. H0
p-value uc test	0.986383	0.462891	0.765868
cc.H0	***C.E.I.	C.E.I	C.E.I
cc.LRstat	NaN	NaN	1.15264
cc.critical	5.991465	5.1991465	5.991465
cc.Decision	Na	Na	F.R.H0
p-value cc test	0.656952	0.602086	0.561962

Fonte: Elaborazione propria.

Nella tabella sopra riportata vengono sintetizzati i principali risultati ottenuti a seguito del modello definito sui tre profili di rischio ricavati dal campione di clienti messi a disposizione dall'istituto bancario coinvolto. Seguendo la logica ispirata dal Comitato di Basilea: fino a 4 eccezioni il modello viene considerato di buona qualità, fino a 9 parzialmente adeguato e da 10 eccezioni non accurato. Nel caso pratico riportato, riscontriamo che il modello si presenta parzialmente adeguato in tutti e tre i casi analizzati. A conferma di quanto indicato scaturiscono i risultati successivi, a partire dai valori derivanti

dal rapporto  $actual.exceed/numero\ di\ osservazioni$ , in tutti e tre i casi osservati minori ad  $\alpha = 5\%$  previsto nella stima del VaR. Per quanto attiene la solidità del modello verificata tramite gli stress test , ovvero unconditional test (uc\_test) e conditional test (cc\_test) , i valori delle rispettive statistiche test (uc.LRstat) e (cc.LRstat), risultano minori rispetto al valore critico così come il valore del p-value non permette di rifiutare l'ipotesi nulla, dando stabilità e adeguatezza al modello. Mantenendo stabili i valori di reddito, età e professionalità dei tre profili coinvolti, viene modificata la composizione qualitativa dei singoli portafogli, lasciando immutata il numero di titolo acquistati. Nello specifico :

- Rischio Basso : Unicredit – Enel;
- Rischio Medio: Unicredit - Mediolanum
- Rischio Alto : Mps – Enel – Unicredit – Mediolanum – Ubi

**Tabella 3.5. :** Modifica della composizione di portafoglio

	Rischio Basso	R.Basso Mod.	Rischio Medio	R.Medio Mod.	Rischio Alto	R. Alto Mod.
expected.exceed	9	9	9	9	8	9
actual.exceed	9	7	7	9	8	9
actual.exceed/n.os	4%	3%	3%	4%	3%	4%
uc.H0	C.E. *	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.	C.E.
uc.LRstat	0.00029	0.528392	0.528392	0.00029	0.0886748	0.00029
uc.critical	3.84145	3.814145	3.84146	3.84146	3.84145	3.84145
uc.Decision	**F.R. H0	F.R. H0	F.R. H0	F.R. H0	F.R. H0	F.R. H0
p-value uc test	0.986383	0.462891	0.462891	0.986383	0.765868	0.986383
cc.H0	***C.E.I.	C.E.I	C.E.I	C.E.I	C.E.I	C.E.I
cc.LRstat	NaN	NaN	NaN	NaN	1.15264	0.51495
cc.critical	5.991465	5.991465	5.1991465	5.1991465	5.991465	5.991465
cc.Decision	Na	Na	Na	Na	F.R.H0	F.R.H0
p-value cc test	0.656952	0.602086	0.602086	0.656952	0.561962	0.751452

\*C.E: Correct Exceedances; \*\* Fail to Rejct H0; \*\*\*Correct Exceedances &Independent

A seguito delle modifiche effettuate, eccezion fatta per il rischio basso per il quale si assiste ad una diminuzione delle violazioni, per i rimanenti profili le violazioni del VaR aumentano. Una prima interpretazione può ritrovarsi nell'aumento della diversificazione di settore, ovvero una diversificazione del portafoglio in base alla natura del titolo (bancario, energetico, ecc) . Nel caso del rischio basso, difatti, rispetto alla precedente costituzione di portafoglio viene introdotto il principio di diversificazione di settore che permette al soggetto di abbattere la concentrazione di capitale in un unico settore migliorando così i valori di rischiosità. Negli altri due casi, viene violata la componente di diversificazione settoriale aumentando la concentrazione di portafoglio in titoli bancari ottenendo così un peggioramento della rischiosità del modello e un aumento delle violazioni del VaR. Stabili i risultati degli stress test , difatti, le rispettive statistiche test risultano minori rispetto ai valori critici, così come i p.value non permettono di rigettare l'ipotesi nulla dando validità al modello predisposto.

## Conclusioni

Le scelte di asset allocation compiute dagli individui vengono spesso indirizzate dalle imprese di investimento le quali, attraverso un questionario, raccolgono informazioni personali dai soggetti per consigliare investimenti in linea con le loro esigenze e caratteristiche. Per i servizi di gestione del portafoglio o di servizio di consulenza, le imprese di investimento sottopongono i soggetti al test di adeguatezza e, nel caso in cui non rispondo a determinati requisiti, sarà loro precluso l'investimento in strumenti finanziari rischiosi. Di conseguenza, le decisioni di asset allocation finanziaria non sempre derivano da una scelta individuale effettuata dall'investitore ma spesso vengono indirizzate da un soggetto competente per consentire al cliente il raggiungimento dei suoi obiettivi. Tuttavia, molti studi dimostrano l'impatto di alcuni aspetti del profilo degli investitori nella loro propensione al rischio e, di conseguenza, nelle scelte di allocazione di patrimonio. L'analisi condotta ha permesso di confrontare gli aspetti che secondo la letteratura influenzano la propensione al rischio degli investitori con quanto richiesto in fase di collocamento pratico del prodotto. Nella consulenza quotidiana, gli strumenti messi a disposizione sono principalmente focalizzati sugli aspetti legati alla capacità di assunzione di rischi, quindi sullo studio degli obiettivi di investimento e l'esplicitazione dell'*holding period*. Per quanto riguarda la tolleranza al rischio la letteratura indaga ampiamente l'influenza degli aspetti socio-demografici e personali, che non sempre sono considerati alla base della valutazione di rischio nei questionari MiFID. Variabili fondamentali, confermati in letteratura al fine della definizione di un corretto profilo di rischio della controparte, sono la consistenza del reddito e del patrimonio del rispondente. Vengono raccolte informazioni per quanto riguarda la professione svolta e il *background risk* sostenuto dagli investitori, elementi considerati in grado di influenzare le scelte di asset allocation. Il titolo di studio, conoscenze in materia di investimenti e l'esperienza maturata in ambito finanziario sono aspetti considerati influenti a livello teorico che trovano riscontro nelle domande

poste ai clienti tramite l'apposito questionario. A supporto di quanto proposto, e sottoscritto dal cliente, viene stimato per il set dati ottenuto, un modello VaR applicato ad ogni singolo portafoglio per i tre clienti individuati. In tutti e tre i casi il modello formulato con  $\alpha = 5\%$  non viene violato, infatti, sulla base dei criteri di rischio e prudenza definiti dall'istituto in fase di collocamento e gestione del risparmio, il rapporto tra le effettive violazioni del modello e il numero di osservazioni si mantiene al disotto del 5% previsto. Medesimo risultato viene ottenuto a seguito di un arbitraria rimodulazione dei tre portafogli considerati, difatti, pur modificandone le composizioni invertendo i titoli tra i medesimi clienti, il modello mantiene la sua efficacia rimanendo nei margini del 5% definito. Una prima motivazione può ritrovarsi nell'aumento della diversificazione di settore, ovvero una diversificazione merceologica del portafoglio in base alla natura del titolo (bancario, energetico, ecc) . Nel caso del rischio basso, difatti, rispetto alla costituzione iniziale del portafoglio viene introdotto il principio di diversificazione di settore che permette al soggetto di abbattere la coconcentrazione di capitale in un medesimo settore (vedi il bancario nel caso specifico) e migliorare i valori di rischiosità. Negli altri due casi, al contrario, viene violata la componente di diversificazione settoriale aumentando la concentrazione di portafoglio in titoli bancari ottenendo così un peggioramento della rischiosità del modello e un aumento delle violazioni del VaR. La stima del modello ha permesso di validare quanto proposto e accettato dal cliente, calando uno strumento prettamente utilizzato nell'ambito della *financial corporate governance* su portafogli *private* al fine di confermare statisticamente quanto proposto in seno all'attività di consulenza.

## Bibliografia

ABI – Associazione Bancaria Italiana (2013) Linee Guida Abi per l'applicazione degli orientamenti ESMA concernenti alcuni aspetti dei requisiti di adeguatezza prescritti dalla MiFID.

AGARWAL S., DRISCOLL J., GABAIX X. E LAIBSON D. (2008), Learning in the credit card market, Working Paper No. 13822, *National Bureau of Economic Research*.

ANBAR A., EKER M. (2010), An empirical investigation for determining of the relation between personal financial risk tolerance and demographic characteristic. *Ege Academic Review*, pp. 503-523.

AKAIKE H, (1973) Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, in Petrov, Csaki, International Symposium on Information Theory, *Akademia Kiado, Budapest*

AKAIKE H. (1974) A new look at the statistical model identification, *IEEE - Transactions on Automatic Control*, AC-19, 716-723

ALEXANDER C. (1996), The Handbook of Risk Management and Analysis, *Chichester, John Wiley & Sons*.

AMENDOLA A, NIGLIO M, VITALE CD, (2009), Statistical properties of SETARMA models, *Communication in Statistics: theory and Methods*, 38, 2479- 2497

BAUWNS L., LAURENT S., ROMBOUITS V. K. J. (2006), Multivariate GARCH Models: a Survey, *Journal of Applied Econometrics*, Vol.21, pp.79-109.

BARNARD, G.A (1947). A review of Sequential Annalysis by Abraham Wald. *Jour, Amer.Statist. Ass.*, 42 , 658 – 669.

BERA, A.K. e C.M.JARQUE (1980) “Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals”. In *Economics Letters* 6, pp. 255-259

BELKIN B, SUCHOWER S., FOREST L.R. (1998) A one-parameter representation of credit risk and transition matrices. *CreditMetrics Monitor*, pp. 46–56.

BOLLORSLEV T. (2007), Glossary to ARCH (GARCH), *Duke University and NBER*, <http://www.faculty.chicagobooth.edu/>

- BOLLORSLEV T. (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307-327
- BOX, G. e G.JENKINS (1970). Time series analysis: Forecasting and control. *Holden Day*.
- BOUDT K., CORNELISSEN J., PAYSEUR S. Highfrequency: Toolkit for the analysis of highfrequency financial data in R.
- BROCKWELL, P.J. e R.A. Davis (2009). Time Series: Theory and Methods. *Springer*
- BROCKWELL PJ, DAVIS RA, (1996), Introduction to Time Series and Forecasting, *Springer-Verlag, New York*
- BARONE – ADESI G., GIANNOPOULOS K. (1996), A Simplified Approach to the Conditional Estimation of Value at Risk”, *Futures and Options World*, October, pp 68-72.
- BARONE – ADESI G., GIANNOPOULOS K., VOSPER L. (1998), VaR Without Correlation for Non-Linear Portafolios , *Journal of futures Markets*, 19 ,pp.583 – 602.
- BEDER T.S. (1995), VaR: Seductive but Dangerous *Financial Analyst Journal*, September – October, pp 12-24.
- BERKOWITZ J. (2001), Testing Density Forecast, Applications to Risk Management, *Journal of Business and Economic Statistics*, 19, pp. 465-474.
- B. BELKIN, S. SUCHOWER, L. R. FOREST. (1998) The effect of systematic credit risk on loan portfolio value-at-risk and loan pricing. *CreditMetrics Monitor*, pp. 17–28.
- B. BELKIN, S. SUCHOWER, e L. R. FOREST. (1998) A one-parameter representation of credit risk and transition matrices. *CreditMetrics Monitor*, pp. 46–56.
- BIELECKI T.R., RUTKOWSKI M. (2002) Credit risk: modeling, valuation and hedging. *SpringerVerlag*, New York.
- BOHN J., KEALHOFER S. (2001), Portafolio Management of Default Risk, Working paper, *San Francisco, KMV*
- BLUHUM C. OVERBECK L. WAGNER C. (2003) An introduction to credit risk modeling. *Chapman and Hall*, London.
- CARROL C. D. (2000), Portfolios of the rich, Working Paper No. 7826, *National Bureau of Economic Research*.

- CARTY L.V., LIEBERMAN D. (1997) Historical default rates of corporate bond issuers, 1920- 1996. *Moody's Global Credit Research*.
- CAVEZZALI E., RIGONI U. (2012), Know your client! Investor profile and tailor-made asset allocation recommendations, *The Journal of Financial Research* pp. 137-158.
- CHRISTOFFERSEN P.F. (1998), Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review*, 39, November, pp.841-862
- CHRISTOFFERSEN P.F.(2003), Elements of Financial Risk Management, *Academic Press, Elsevier Science*.
- CHRISTOFFERSEN P., PELLETIER D., (2004) Backtesting Value-at-Risk: A Duration-Based Approach, *Journal of Empirical Finance*, 2, 84-108.
- CHATTOPADHYAY S., DASGUPTA R. (2015), Demographic and socioeconomic impact on risk attitudes of the Indian investors-an empirical study, *Asian Economic and Financial Review*, pp. 601-623.
- COCCO J. F., GOMES F. J., MAENHOUT P. J. (2005), Consumption and portfolio choice over the life cycle, *The Review of Financial Studies*.
- CROUHY M.TURNBULL S.WAKEMAN L. (1999), Measuring Risk-Adjusted Performance, *The Journal of Risk*, vol.2, n.1, pp.1-31.
- CROUHY M., GALAI D., MARK R. (2000) A comparative analysis of current credit risk models. *Journal of Banking and Finance*, 24:59–117.
- CROSBIE P.J. (1999) Modelling default risk. *KMV*.
- COSTA M. (2001) Metodi statistici nell'analisi di variabili finanziarie. Indicatori descrittivi e modelli interpretativi. *CLUEB*, Bologna.
- DAMADARAN, A. (2007), Strategic Risk Taking: A Framework for Risk Management, Pearson Education, New Jersey.
- DOWD, BLAKE (2006) After VaR: The Theory, Estimation, and Insurance Applications of Quantile-Based in *Risk Measures*.
- DOWD, K. (2006), Retrospective Assessment of Value-at-Risk. Risk Management: A Modern Perspective, pp. 183-202, San Diego, *Elsevier*

DANIELSSON J., DE VRIES C.G. (1997), Multivariate stochastic volatility models: estimation and a comparison with VGARCH models, *mimeo, Department of Economic, University of Iceland*.

DUFFIE D. SINGLETON K.J. (1999) Modeling the term structure of defaultable bonds. *Review of Financial Studies*, 12:687–720.

DI CLEMENTE A., ROMANO C. (2004) Measuring and optimizing portfolio credit risk: a copula-based approach. *Economic Notes*, 33:325–357.

EMBRECHTS P., MCNEIL A.J. STRAUMANN D., (2002) Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls in *Dempster M., Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge, Cambridge University Press.

EMBRECHTS P.,C. KLUPPLBERG, T.MIKOSCH (1997), Modelling Extremal Events. *Berlin Verlag*.

ENGLE R.F. (2009), Anticipatig Correlation, A new Paradigm for Risk Managemet, *Princeton University Press*.

ESPA, G. e R. MICCIOLO (2012) Analisi esplorativa dei dati con R. *Apogeo*.

FRANKS J. TOROUS W. (1994) A comparison of financial restructuring in distressed exchanges and reorganizations. *Journal of Financial Economics*, 35:349–370.

JARQUE, C. M. & BERA, A. K. (1987), A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review* 55, 163–172.

JOKIVUOLLE E., PEURA S. (2003) A model for estimating recovery rates and collateral haircuts for bank loans. *European Financial Management*, 12:299–314

GOURIEROUX C., LAURENT J.P., SCAILLENT O. (2000) Sensitivity Analysis of Values at Risk, *Journal of Empirical Finance*,pp 225-245.

GIESECKE K. (2004) Credit risk modeling and valuation: an introduction. Working Paper, Cornell University.

GALLO, G.M. e B.PACINI (2002). Metodi quantitativi per i mercati finanziari. *Roma, Carocci*.

GESKE R.(1977) The valuation of corporate liabilities as compound options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12:541–552.

GHALANOS A. (2014). Introduction to the rugarch package. *The Comprehensive R Archive Network*.

GRABLE J. E. (1997), Investor risk tolerance: testing the efficacy of demographics as differentiating and classifying factor, *Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University*.

GRABLE J. E., JOO S. H. (1999), How to improve financial knowledge, attitudes, and behaviours, among consumer science constituencies, *The Journal of Consumer Education*, pp. 20-26.

GUIO L., JAPPELLI T. (2000), Household Portfolios in Italy, Working Paper No. 43, *Centre for Studies in Economics and Finance*.

GUIO L., JAPPELLI T. (2006), Information acquisition and portfolio performance, Working Paper No. 167, *Centre for Studies in Economics and Finance*.

GUIO L., ZINGALES L., SAPIENZA P. (2008), Trusting the stock market, *The Journal of Finance*.

GUIO L., PAIELLA M. (2008), Risk aversion, wealth, and background risk, *Journal of the European Economic Association*, pp. 1109

GUIO L., PAIELLA M. (2004), The role of risk aversion in predicting individual behaviour, *Banca d'Italia Temi di Discussione del Servizio Studi*.

HALIASSOS M., BERTAUT C. C. (1995), Why do so few hold stocks? *The Economic Journal*, pp. 1110-1129.

HALLAHAN T. A., FAFF F. W., MCKENZIE M. D. (2004), An empirical investigation of personal financial risk tolerance, *Financial Services Review*, pp. 57-78.

HULL J., WHITE A. (1998), Value at Risk when Daily Changes in Market Variables are not Normally Distributed, *Journal of Derivates*,5, pp.9-19.

HU Y.T. PERRAUDIN W. (2002) The dependence of recovery rates and defaults. *Mimeo*, Birkbeck College

HAAS M., (2001) New Methods in Backtesting, *Financial Engineering Research Center, Working Paper*.

JORDAN J.V., MACKAV R.J. (1996) Assessing Value at Risk for Equity Portfolios: Implementing Alternative Techniques in *Beckstorm H.C. Fabozzi F. (a cura di) Handbook of Firmwide Risk Management*.

- JORION P. (1997) In defence of VaR. *Mimeo, University of California Irvine.*
- JORION P. (2003), *Financial Risk Manager Handbok, Wiley& Sons.*
- JORION, P. (2001), *Value at Risk, The New Benchmark for Managing Financial Risk, 2nd Edition, McGraw-Hill, United States*
- KUPIEC P. (1995) Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models. *Journal of Derivatives*, 3, 73-84.
- KEENAN S.C., HAMILTON D. T., BERHAULT A. (2000). Historical default rates of corporate bond issuers, 1920-1999. *Moody's Global Credit Research.*
- LOPEZ J.A. (1999) Methods for Evaluation Value at Risk Estimates, *Federal Reserve Bank of San Francisco Economic Review*, 2.
- LOPEZ, J. (1999), Regulatory Evaluation of Value-at-Risk Models, *Journal of Risk* 1, 37-64.
- LEWELLWN W. G., RONALD C. L., SCHALARBAUM G. G. (1977), Patterns of investment strategy and behaviour among individual investor, *The Journal of Business*, pp. 296-333.
- MASPERO D. (1997) I modelli VaR basati sulle simulazioni in Sironi A, Marsella M. *La misurazione e la gestione di mercato. Modelli, strumenti, politiche.* Bologna, Il Mulino.
- MALMENDIER U., Nagel S. (2011), Depression Babies: Do Macroeconomic Experiences Affect Risk Taking?, *The Quarterly Journal of Economics*, pp. 373- 416.
- PEEL DA, SPEIGHT AEH, (1994) Testing for non-linear dependence in interwar exchange rates, *Weltwirtschaftliches Archiv*, 130, 391-417
- PHILLIPS PCB, (1987) Time series regression with a unit root, *Econometrica*, 55, 277-301
- PHILLIPS PCB, PERRON P. (1988), Testing for a unit root in time series regression, *Biometrika*, 75, 335-346
- PICCOLO D, 2001, *Statistica, Ed. Il Mulino*
- PICCOLO D, VITALE CD, (1984) *Metodi Statistici per l'Analisi Economica, Il Mulino, Bologna*
- PRITSKER M., Evaluating Value-at-Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time. *Journal of Financial Services Research*.12, 201-241.

RISKMETRICS, (1996) Technical Document, quarta ediz., *RiskMetrics Group, Inc., New York*.

RITSKER M., (1997) Evaluating Value-at-Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time, *Journal of Financial Services Research*, 12, 201-241

SNEDECOR GW, COCHRAN WG (1980) Statistical Methods, 7th edition, *Iowa State University Press: Ames, Iowa*

SAITA F.(2000), Il risk management in Banca, Milano, *Egea*

SAITA F. (2007), Value at Risk and Bank Capital Management (2007), Amsterdam, *Academic Press- Elsevier*.

SIMONS K. (1996), Value at Risk - New Approaches to Risk Management, VAR: Understanding and Applying Value-at-Risk, *RISK publications*, London.

SIRONI A. (2005), Gestione del rischio e allocazione del capitale nelle banche, Milano, *Egea*.

SIRONI A. (2005), Rischio e valore nelle banche, Milano, *Egea*.

TONG H, (1978) On a threshold model, in Pattern Recognition and Signal Processing, ed. *Chen, Sijhoff & Noordhoff*, Amsterdam

TONG H. LIM KS, (1980) Threshold autoregression, limit cycle and cyclical data, *Journal of the Royal Statistical Society, B* 42, 245-292

TONG H. (1990) Non-Linear Time Series: a Dynamical System Approach, *Oxford University Press*, Oxford

TSAY RS. ,(2003) Analysis of Financial Time Series, *John Wiley*,

WEDDERBURN RWM, (1974) Quasi-likelihood Functions, Generalized Linear Models, and the Gauss - Newton Method, *Biometrika*, 61 (3), 439-447

ZAKOÏAN JM, (1994) Threshold heteroscedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 931-955