

Tesi di Dottorato Pentangelo Rosa

1 Abstract (INGLESE)

How often do we try to get the best result with the least effort, spend as little time as possible to perform a task or make the most of the resources available in the workplace? In everyday life, the word "optimize" is therefore often present. In particular, the optimization has as its object the study and the development of quantitative methodologies and tools for the solution of decision problems. This is a discipline born in the military field about 80 years ago. Over the years, it has found application in several sectors such as logistics and production, finance and telecommunications. Currently it has become an indispensable tool for supporting decision-making processes. The problems faced are typically those in which decisions have to be made on the use of resources available in limited quantities in order to respect an assigned set of constraints, maximizing, for example, the benefit obtainable from the use of the resources themselves.

Many problems of real-life as also problems of theoretical importance in the field of operational research are combinatorial in nature. Combinatorial Optimization studies the optimization problems in which the feasible set is defined in terms of combinatorial structures. Many of these problems are defined on graphs (directed or undirected). The fundamental characteristic of these problems is therefore to be defined on discrete space.

This doctoral thesis involves the study of three different combinatorial optimization problems defined on graphs: the *Minimum Spanning Tree problem with Conflicting Edge Pairs* (MSTC), the *Close-enough Arc Routing problem* (CEARP) and the *All Color Shortest Path problem* (ACSP). All these problems concern the identification of subgraphs and they are variants of well known problems. In the following the definition of these problems are reported.

- **MSTC**: Let $G(V, E, P)$ be an undirected edge weighted graph, where V is the set of n vertices, E the set of m edges and $P \subseteq E \times E$ is the set of *conflict edge pairs*. The MSTC consists of finding a minimum spanning tree of G without

conflicting edge pairs, that is for each pair $\{e_i, e_j\} \in P$ at most one between e_i and e_j belongs to the edges of the spanning tree. The MSTC has been shown to be *NP*-hard.

- CEARP: Let $G = (V, A, M)$ be a directed graph with a set of vertices V , a set of arcs A , and a set of targets M located on arcs. Each arc in A has a cost and an arc $a \in A$ covers a target $m \in M$ iff the target is either on the arc or within a predetermined distance (radius) from the arc. Fixed a depot node, the *CEARP* consists of finding a minimum cost tour starting and ending at the depot node, traversing a subset of arcs such that all the targets in M are covered. The *CEARP* has been shown to be *NP*-hard.
- ACSP: Let $G = (V, E, C)$ be an undirected, connected and vertex labeled graph with V the set of vertices, E the set of the edges and C the set of labels (or colors). The aim of *ACSP* is to find a path of minimum cost such that all colors are reached at least once. The *ACSP* has been shown to be *NP*-hard.

This dissertation is organized as follows.

Chapter 1 provides some basic concepts and definitions needed to understand subsequent content. We will analyze some elementary definitions of *graph theory*, as well as some concepts of *polyhedral theory*.

Chapter 2 describes the *Minimum Spanning Tree problem*, the *Arc Routing problem* and the *Shortest Path problem* from which MSTC, *CEARP* and *ACSP* are originated, respectively. These last problems are addressed in Chapter 3, 4 and 5.

In Chapter 3 we propose a multi ethnic genetic algorithm for the MSTC problem. Moreover three local search procedures are developed to improve the solutions inside the population during the computation. Furthermore, we introduce a new set of valid inequalities for the problem, based on the properties of its feasible solutions, and we develop a Branch-and-Cut algorithm based on them. Computational tests are carried out on the benchmark instances proposed in literature and on a new set of randomly generated instances.

In Chapter 4 we face the *CEARP* problem and we propose some techniques to reduce the size of the input graph and a new effective mixed integer programming (MIP) formulation for the problem. The effectiveness of the reduction techniques are showed. Computational results obtained by comparing our MIP model with the

existing exact methods show that our algorithm is really effective in practice.

In Chapter 5 we propose some new properties for the ACSP problem, as well as a compact representation of the feasible solutions. Furthermore, we present a novel mathematical formulation and a metaheuristic approach based on these ideas. Computational results show the effectiveness of our approach with respect to previous contributions proposed in literature.

A summary of the obtained results are reported at the end of this dissertation. Finally we present some remarks and future research directions.

2 Abstract (ITALIANO)

Quanto spesso cerchiamo di ottenere il miglior risultato con il minimo sforzo, spendere il minor tempo possibile per eseguire un'attività o sfruttare al meglio le risorse disponibili sul posto di lavoro? Nella vita di tutti i giorni, quindi, la parola "ottimizzare" è spesso presente. In particolare, l'ottimizzazione ha come oggetto lo studio e lo sviluppo di metodologie e strumenti quantitativi per la soluzione di problemi decisionali. Si tratta di una disciplina nata nel campo militare circa 80 anni fa. Nel corso degli anni, ha trovato applicazione in diversi settori come la logistica e la produzione, la finanza e le telecomunicazioni. Attualmente è diventata uno strumento indispensabile per supportare i processi decisionali. I problemi affrontati sono in genere quelli in cui le decisioni devono essere prese sull'uso di risorse disponibili in quantità limitate al fine di rispettare un insieme assegnato di vincoli, massimizzando, ad esempio, il beneficio ottenibile dall'uso delle risorse stesse.

Molti problemi della vita reale, come anche problemi di importanza teorica nel campo della ricerca operativa, sono di natura combinatoria. L'ottimizzazione combinatoria studia i problemi di ottimizzazione in cui l'insieme ammissibile è definito in termini di strutture combinatorie. Molti di questi problemi sono definiti su grafi (orientati o non orientati). La caratteristica fondamentale di questi problemi è quindi da definire sullo spazio discreto.

Questa tesi di dottorato prevede lo studio di tre diversi problemi di ottimizzazione combinatoria definiti sui grafi: *Minimum Spanning Tree problem with Conflicting Edge Pairs* (MSTC), *Close-enough Arc Routing problem* (CEARP) e *All Color Shortest Path problem* (ACSP). Tutti questi problemi riguardano l'identificazione di sottografi e sono varianti di problemi ben noti. Di seguito sono riportate le definizioni di questi problemi.

- MSTC: Sia $G(V, E, P)$ un grafo non orientato e pesato sugli archi, dove V è l'insieme degli n nodi, E l'insieme degli m archi e $P \subseteq E \times E$ l'insieme delle *coppie di archi in conflitto*. Il problema dell' MSTC consiste nel cercare un albero di copertura di minimo costo di G senza coppie di archi in conflitto, cioè per ogni coppia $\{e_i, e_j\} \in P$ al più uno tra e_i e e_j appartiene agli archi dell'albero ricoprente. E' stato dimostrato che il problema dell' MSTC è *NP-hard*.
- CEARP: Sia $G = (V, A, M)$ un grafo orientato dove V è l'insieme dei vertici, A l'insieme degli archi, e M l'insieme dei target posizionati sugli archi. Ogni arco in A ha un costo e un arco $a \in A$ copre un target $m \in M$ se e solo se il tar-

get si trova sull'arco oppure entro una determinata distanza (raggio) dall'arco. Fissato un nodo deposito, il problema *CEARP* consiste nel cercare un tour di costo minimo che parta dal nodo deposito e termini nello stesso. Tale tour deve attraversare un sottoinsieme di archi in modo tale che tutti i target in M siano coperti. E' stato dimostrato che il problema *CEARP* è *NP-hard*

- ACSP: Sia $G = (V, E, C)$ un grafo orientato connesso e con etichette assegnate ai nodi dove V è l'insieme dei nodi, E l'insieme degli archi e C l'insieme delle etichette (o colori). Lo scopo dell' ACSP è cercare un percorso di costo minimo tale che tutti i colori vengano raggiunti almeno una volta. E' stato dimostrato che il problema dell' *ACSP* è *NP-hard*

Questa tesi è organizzata come segue.

Il Capitolo 1 fornisce alcuni concetti e definizioni di base necessari per comprendere gli argomenti successivi. Analizzeremo alcune definizioni elementari di *teoria dei grafi*, così come alcuni concetti della *teoria poliedrale*.

Il Capitolo 2 descrive rispettivamente *il problema del Minimum Spanning Tree*, *il problema di Arc Routing* e *il problema dello Shortest Path* da cui provengono i problemi MSTC, CEARP e ACSP. Questi ultimi problemi sono trattati nei capitoli 3, 4 e 5.

Nel Capitolo 3 proponiamo un algoritmo genetico multi-etnico per il problema dell' MSTC. Inoltre sono state sviluppate tre procedure di ricerca locali per migliorare le soluzioni all'interno della popolazione durante il calcolo. Inoltre, introduciamo un nuovo insieme di disuguaglianze valide per il problema, basato sulle proprietà delle sue soluzioni ammissibili, e sviluppiamo un algoritmo di tipo Branch-and-Cut basato su di esse. I test computazionali vengono eseguiti sulle istanze di riferimento proposte in letteratura e su un nuovo insieme di istanze generate casualmente.

Nel Capitolo 4 affrontiamo il problema CEARP e proponiamo alcune tecniche per ridurre le dimensioni del grafico di input e una nuova formulazione MIP (mixed integer programming) efficace per il problema. L'efficacia delle tecniche di riduzione è mostrata. I risultati computazionali ottenuti confrontando il nostro modello MIP con i metodi esatti esistenti mostrano che il nostro algoritmo è davvero efficace nella pratica.

Nel Capitolo 5 proponiamo alcune nuove proprietà per il problema dell' ACSP, oltre a una rappresentazione compatta delle soluzioni ammissibili. Inoltre, presen-

tiamo una nuova formulazione matematica e un approccio meta-euristico basato su queste idee. I risultati computazionali mostrano l'efficacia del nostro approccio rispetto ai precedenti contributi proposti in letteratura.

Un sommario dei risultati ottenuti sono riportati alla fine di questa tesi. Infine presentiamo alcune osservazioni e indicazioni per la gli sviluppi futuri.