

## Università degli studi di Salerno

Dipartimento di Ingegneria Civile

**Dottorato di Ricerca in Rischio e sostenibilità nei sistemi dell'ingegneria civile, edile ed ambientale**

XXX CICLO

### **Volte e cupole in muratura: un approccio basato sull'equilibrio**

Elena De Chiara

**Tutor:** Prof. Arch. Maurizio Angelillo

**Coordinatore** Prof. Ing. Fernando Fraternali

#### **Abstract**

Elementi curvi in muratura, quali archi, volte e cupole, rappresentano uno degli elementi strutturali più diffusi, nonché più affascinanti, della Architettura storica mondiale. Le uniche testimonianze scritte esistenti circa l'insieme di regole tecniche che sono state utilizzate per l'erezione di strutture murarie, anche quelle più complesse, risalgono a tempi piuttosto recenti, un paio di secoli precedenti alle scoperte scientifiche di Galilei e Newton. Da tali scritti si apprende che le regole in base alle quali furono erette opere in muratura quali le Cattedrali Gotiche o le cupole e scale del Barocco europeo, erano pure regole di proporzione. In effetti le tensioni di compressione esistenti nelle murature sono tipicamente molto basse in rapporto alla resistenza del materiale, per cui l'analisi di una struttura muraria può ridursi primariamente alla determinazione di un flusso di forze di compressione in equilibrio con le forze esterne. Una teoria sensata e ragionevole che spiega l'essenza di questo comportamento in termini moderni è basata sulle restrizioni che definiscono il materiale unilaterale (No-Tension) di Heyman che saggiamente rilegge e riprende il sistema di regole e metodi usati dagli antichi maestri costruttori, inserendo l'analisi delle strutture in muratura nella consolidata cornice dell'Analisi Limite. Nel suo lavoro del 1966, dal titolo "the stone skeleton", Heyman fonde la sua profonda conoscenza dell'allora nascente Teoria della Plasticità. Per quanto riguarda le volte e le cupole, è solo recentemente che la teoria di Heyman è stata adottata ed applicata con successo. In questo ambito, esistono due approcci alternativi che sono stati proposti. Il primo è la così detta "Thrust Network Analysis" e il secondo è il "Thrust Surface Method". Questo lavoro di tesi è rivolto all'applicazione del "Thrust Surface Method", ed in particolare all'implementazione al computer di un codice di calcolo in grado di produrre stati di tensione membranali di compressione su superfici interne alla muratura, in equilibrio con assegnati carichi esterni. Il "Thrust Surface Method" è essenzialmente basato sull'equilibrio dei carichi su di una superficie di membrana, tale superficie  $S$  rappresenta solo il supporto di una tensione ammissibile (ovvero equilibrata con i carichi e di compressione) contenuta all'interno dello spessore della volta, cui il continuo circostante

trasmette l'azione dei carichi (sfruttando eventualmente anche piccole tensioni di trazione). Questa libertà di scelta della superficie  $S$  fornisce un vasto repertorio di possibili stati di tensione ammissibili, molto più ampio di quello ottenibile per gli archi (in cui le forme possibili sono pesantemente ristrette dall'equilibrio) e rappresenta l'aspetto peculiare sia della TNA che del TSM. In particolare, con il "Thrust Surface Method" l'equilibrio della membrana sotto l'effetto di carichi assegnati è un problema staticamente determinato, nel senso che tre sono le componenti di tensione incognite e tre le condizioni di equilibrio. Per una forma assegnata  $S$  il repertorio delle tensioni equilibrate è in effetti determinato dalle condizioni al contorno. La scelta della forma  $S$  non è comunque completamente libera, dato che le tensioni di membrana devono essere di pura compressione. Lo scopo principale di questa tesi è quello di proporre un metodo per rendere automatica la ricerca di un campo di tensioni ammissibile per una volta di forma arbitraria, basato sulla soluzione iterativa di un problema determinato, in cui il ruolo dell'incognita alternativamente si scambia tra la forma e la tensione. La possibilità pratica di costruire tale procedura iterativa parte dalla formulazione dell'equilibrio di membrana su di una superficie  $S$  secondo lo schema di Pucher che nel suo lavoro del 1934, utilizzando mezzi analitici primitivi, Pucher, introducendo come variabili primali le così dette "tensioni proiettate", mostra come le tre equazioni di equilibrio di  $S$  possono essere disaccoppiate in due equazioni che rappresentano l'equilibrio superficiale di  $S$ , indipendenti dalla geometria della membrana, e in una equazione che rappresenta l'equilibrio trasversale di  $S$ , equazione in cui la curvatura di  $S$  determina i coefficienti. La soluzione generale delle due equazioni superficiali può esprimersi in termini di una funzione  $F$  che rappresenta il potenziale delle tensioni (funzione di Airy), e la equazione di equilibrio trasversale si riduce ad una equazione differenziale del secondo ordine lineare in  $F$  i cui coefficienti sono rappresentati dall'Hessiano della funzione  $f$  che descrive  $S$  in una rappresentazione parametrica alla Monge. La restrizione che il materiale sia esclusivamente compresso impone una restrizione sul potenziale di tensione:  $F$  deve essere concava, ossia il suo Hessiano deve essere semi-definito negativo. Anche la funzione  $f$  è ristretta dalla condizione che i valori di  $f$  siano contenuti, in ogni punto, nell'intervallo definito dall'estradosso ed intradosso della volta. La procedura iterativa che si propone, che parte da una superficie assegnata  $f^0$ , consiste in una strategia basata sulla ottimizzazione per generare successive funzioni di tensione  $F^0, F1, F2, \dots, Fn, f1, f2, \dots, fn$ , con l'obiettivo di ottenere in modo automatico una funzione di tensione quanto più possibile concava ed una superficie di membrana quanto più vicina possibile alla superficie media della volta.

### **Abstract**

Masonry curved elements, such as arches, vaults and domes, are among the most widespread, and fascinating, world historical Architecture structural elements. Written historical records about the set of technical rules used to erect masonry structures, even the most complex of them, date to quite recent times, around a

couple of century before scientific discoveries of Galilei and Newton. These recordings show that the rules to build masonry structures like Gothic Cathedrals or domes and the European Baroque stairs were pure proportion rules. In fact, compressive stress inside masonry are typically very low, compared to the material resistance, hence the analysis of a masonry structure can be reduced mainly to the detection of a flux of compression forces equilibrating the external forces. A reasonable theory, explaining the bases of this phenomenon in modern terms, is based upon the constrains defining the Heyman's unilateral material (No-Tension) evoking the rule system and the methods used by the ancient master builders and integrating the masonry structures analyses in the well defined limit analysis framework. In his 1966 work, entitled "The Stone Skeleton", Heyman casts his deep knowledge of the emerging Plasticity Theory of the time. Heyman theory was adopted and successfully applied to arches and domes only recently. Two alternate approaches have been proposed in this context. The first is the so called "Thrust Network Analysis" (TNA), while the second is the "Thrust Surface Method" (TSM). This thesis focuses on the "Thrust Surface Method" application, specifically in the implementation of an algorithm able to produce compressive membrane stress states on surfaces inside the masonry, in equilibrium with assigned external loads. Thrust Surface Method is based essentially on the loads equilibrium on a membrane surfaces. Such S surface represents the unique support of an admissible stress (i.e. a compression stress balanced with the loads) contained inside the vault thickness to which the loads action is transmitted by the surrounding continuum (small traction stresses are also used in the process). The freedom of choice of the S surface provides a wide catalogue of possible states of admissible stresses, much wider of the one available for the arches (whose possible shapes are heavily constrained by the equilibrium), and represents the specificity of both TNA and TSM. In details, with the TSM, membrane balance under assigned loads is a statically determined problem, being three both the unknown stress components and the equilibrium condition. For a assigned shape S the catalogue of the balanced stresses is determined, indeed, by the boundary conditions. The choice of the S shape, however, is not fully free, since the membrane stresses have to be purely compression stresses. This thesis has the main purpose to introduce a method for the automation of the research of an admissible stresses field for a vault of chosen shape. Such method is based on the iterative resolution of a determined problem where the variable role is taken alternately by the shape and the stress. The practical ability to implement such iterative procedure is based on the the formulation of the membrane equilibrium on a surface S according to the Pucher scheme. In his 1934 work, Pucher used primitive analytical methods and introduced as primary variables the so called "projected stress", showing how to decouple the three S equilibrium equation in two equations for the S surface equilibrium (equations which are independent from the membrane geometry) and one equation for the S transversal equilibrium, where the S curvature determine the coefficients. The general solution of the two surface equations can be expressed as a F function representing the stress potential (Airy function), while the transversal equilibrium

equation is reduced to a differential linear second order equation in  $F$  whose coefficients are represented by the  $f$  Hessian function describing  $S$  in a Monge parametric representation. Constraint on the material to be exclusively compressed imposes a subsequent constraint on the stress potential:  $F$  has to be concave, i.e. its Hessian has to be semi-defined negative.  $F$  function is restricted too by the condition that  $f$  values are contained, for each point, in the interval defined by the vault extrados and intrados. The proposed iterative procedure, starting from an assigned surface  $f^\circ$ , is built on an optimization based strategy to create sequences of stress functions  $F^\circ, F_1, F_2, \dots, F_n, f_1, f_2, \dots, f_n$ , with the purpose to automatically obtain a stress function as concave as possible and a membrane surface as close as possible to the vault median surface.