On Vector-Valued Schrödinger Operators in L^p–spaces

Abdallah Maichine

Abstract

Consideremo il seguente operatore di Schrödinger à valore vettoriale

$$\mathcal{A}u = \mathrm{div}(Q\nabla u) - Vu = \left(\mathrm{div}(Q\nabla u_j) - \sum_{k=1}^{m} v_{jk}u_k\right)_{1\le j\le m},$$

con $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}^m$ una funzione vettoriale, dove Q è una funzione di matrici reali simmetriche e limitate, che soddisfa la condizione di ellitticità e V, una funzione di matrice misurabile illimitata.

Costruiamo una realizzazione A_p di $\mathcal{A}$ negli spazi $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^m)$, $1 \le p < \infty$, che genera un semigruppo di contrazione fortemente continuo. Innanzitutto, utilizzando i metodi delle forme, otteniamo la generazione di semigruppi olomorfi quando il potenziale V è simmetrico. Nel caso generale, usiamo alcune tecniche di analisi funzionale e teoria degli operatori per ottenere una realizzazione m-dissipativa. In questo caso il semigruppo non è, in generale, analitico.

Caratterizziamo il dominio dell'operatore A_p in $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^m)$ usando in primo luogo una versione non commutativa del teorema di Dore-Venni e poi un teorema di perturbazione dovuto a Okazawa.

Discutiamo alcune proprietà del semigruppo tale che l'analiticità, la compattezza e la positività. Stabiliamo l'ultra-contrattività e deduciamo che il semigruppo è dato da un nucleo. Questo nucleo è una matrice le cui componenti soddisfano le stime gaussiane.

Ulteriori stime degli componenti del nucleo sono fornite per potenziali con una diagonale di crescita polinomiale. Stime adeguate portano al comportamento asintotico degli autovalori dell'operatore di Schrödinger quando il potenziale è simmetrico.