Maximum principles, entire solutions and removable singularities of fully nonlinear second order equations

Giulio Galise

Abstract

Il lavoro di tesi è dedicato ad alcuni aspetti della teoria qualitativa delle soluzioni di viscosità di equazioni a derivate parziali ellittiche nonlineari del tipo

$$F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = f(x), \tag{1}$$

dove $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n \mapsto \mathbb{R}$ ed $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate, Ω un dominio, $\mathcal{S}^n$ è lo spazio delle matrici reali simmetriche $n \times n$ ed u è la funzione scalare incognita. Il gradiente Du e la matrice Hessiana D^2u non hanno un significato classico, ma sono intesi in senso debole.

La nozione di soluzione di viscosità fu introdotta nei primi anni '80 nei lavori di M.G. Crandall, L.C. Evans, P.L. Lions [2]-[3]-[4] relativamente alle equazioni di Hamilton-Jacobi del primo ordine e successivamente estesa da Jensen [6] al caso del secondo ordine. Molti altri autori, tra cui Cabré, Caffarelli, Hishii, Świech, Trudinger, hanno contribuito allo sviluppo di questa teoria dimostrando risultati di esistenza, unicità, regolarità, approssimazione e stabilità enfatizzando così l'utilità delle soluzioni di viscosità per problemi ellittici (e parabolici) nonlineari. Numerosi sono i campi di ricerca in cui la teoria della viscosità trova applicazione: controllo ottimo, giochi differenziali, propagazione di fronti, Matematica Finanziaria.

Il Capitolo 1 è una breve introduzione alla nozione di soluzione viscosa. Trattiamo primo il caso in cui F ed f (1) sono supposte funzioni continue, presentando risultati di confronto, esistenza, stabilità e approssimazione. La nozione di soluzione di viscosità L^p, adatta per affrontare problemi con dipendenza misurabile nella variabile x, chiude il primo capitolo.

Il Capitolo 2 è dedicato alla questione dell'esistenza e unicità di soluzioni intere (i.e. soluzioni in tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$) per equazioni del tipo (1) in cui l'operatore F è uniformemente ellittico e $F(\cdot, r, \cdot, \cdot)$ soddisfa un'ipotesi di crescita superlineare. Nessuna ipotesi di crescita all'infinito è assunta. Questo tipo di problema è stato affrontato nell'ambito delle distribuzioni in [1] per l'equazione

$$\Delta u - |u|^{d-1}u = f(x), \quad f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),\ d > 1 \tag{2}$$

e successivamente generalizzato in [5] per equazioni del tipo

$$F(D^2u) - |u|^{d-1}u = f(x), \quad f \in L^n_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),\ d > 1 \tag{3}$$

nell'ambito delle soluzioni di viscosità.
Ci proponiamo di dimostrare esistenza e unicità di soluzioni intere per una classe più generale di equazioni rispetto a (3), considerando la dipendenza da x, dal gradiente Du ed assumendo una sommabilità locale meno restrittiva sul dato f. La tecnica utilizzata ci consentirà di costruire soluzioni per il problema di Dirichlet in domini, eventualmente illimitati, con frontiera regolare.
Nell'ultima sezione si prova un risultato di non-esistenza di soluzioni per equazioni del tipo

$$F(x, Du, D^2u) - e^u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Nel Capitolo 3 vengono estesi al caso nonlineare alcuni risultati sul Laplaciano ([7]-[8]) riguardanti le soluzioni di blow-up o soluzioni "esplosive".
Il quarto ed ultimo Capitolo è dedicato al Principio di Massimo Esteso (EMP). E' noto che ogni sottosoluzione dell'equazione uniformemente ellittica $F(D^2u) = 0$ in un dominio limitato Ω soddisfa la condizione

$$\limsup_{x \to \partial\Omega} u(x) \leq 0 \Rightarrow u \leq 0 \quad \text{in } \Omega$$

a norma del principio di massimo. Equivalentemente il segno della u sulla frontiera $\partial\Omega$ si propaga in Ω. Ci proponiamo di mostrare che la condizione al bordo può essere indebolita senza alterare la validità del principio di massimo: ogni sottosoluzione u dell'equazione $F(D^2u) = 0$ è non-positiva in Ω assumendo $u \leq 0$ su $\partial\Omega$ a meno di insiemi E di α-capacità nulla (per un opportuno α). In questo modo gli insiemi di capacità nulla possono essere ignorati ai fini del principio di massimo. Il punto fondamentale per stabilire la validità di EMP è la possibilità di costruire mediante i potenziali di Riesz una supersoluzione di un'equazione massimale che esplode sull'insieme E ed è finita in $\mathbb{R}^n \backslash E$. Questo risultato viene poi generalizzato per equazioni uniformemente ellittiche dipendenti anche dal gradiente $F(Du, D^2u) = 0$. Come applicazione di EMP affrontiamo il problema delle singolarità rimovibili, dimostrando che ogni soluzione di viscosità limitata dell'equazione $F(Du, D^2u) = f(x)$ in $\Omega \backslash E$, $E \Subset \Omega$, può essere prolungata ad una soluzione della stessa equazione in tutto Ω se E ha capacità nulla.
Infine consideriamo una classe di operatori ellittici degeneri per la quale il principio di massimo esteso EMP continua a valere.

Bibliografia

[1] H.Brezis, Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity, *Appl. Math. Optim.* 12 (1984), 271–282

[2] M.G.Crandall and P.L.Lions, Condition d'unicité pour les solutions generalisées des équations de Hamilton - Jacobi du premier order, *C.R. Acad. Sci.* 292 (1981), 183–186

[3] M.G.Crandall and P.L.Lions, Viscosity solutions of Hamilton - Jacobi equations, *Trans. Amer. MAth. Soc.* 277 (1983), 1–42

[4] M.G.Crandall, L.C. Evans and P.L.Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton - Jacobi equations, *Trans. Amer. MAth. Soc.* 282 (1984), 487–502

[5] M.J.Esteban, P.L.Felmer and A.Quaas, Superlinear elliptic equations for fully nonlinear operators without growth restrictions for the data, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **53** (2010), 125–141

[6] R. Jensen, The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations, *Arch. Ration. Mech. Anal*, 101 (1988), 1-27

[7] M.Marcus and L.Véron, Uniqueness of solutions with blowup at the boundary for a class of nonlinear elliptic equations, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 317 séries I (1993), pp. 559-563

[8] M.Marcus and L.Véron, Uniqueness and asymptotic behavior of solutions with boundary blow-up for a class of nonlinear elliptic equations, *Ann. Inst. Henri Poincaré,Analyse non linéaire* Vol. 14, no 2, 1997, p. 231-274